Note of The Slides #1

基础回顾部分

试区分以下概念：

- 有界：$\exists M > 0, \forall n, |a_n| \le M$
- 无界：$\forall M > 0, \exists n, |a_n| > M$
- 无穷大：$\forall M > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n| > M$

为什么说单调递增无上界数列一定是$+\infty$?

无上界：$\forall M > 0, \exists n_0, a_{n_0} > M$
递增：$n > n_0 \Rightarrow a_n \ge a_{n_0}$
$\therefore \forall M > 0, \exists N = n_0, \forall n > N, a_n > M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

类比等价无穷小的概念，我们可以有等价无穷大的概念：

if $a_n, b_n \to +\infty$, and $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, then we say $a_n \sim b_n (n \to \infty)$

这时候二者极限通常只差一个常数（或者你说再差一个$o(1)$无穷小），比如调和级数和自然对数就是等价无穷大，差一个欧拉常数

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)(n \to +\infty)$$

课本习题拓展

幂平均

幂平均定义参照讲义
一些记号：
Harmonic mean: $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$

Geometric mean: $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Arithmetic mean: $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

Quadratic mean: $Q_n = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$
平均值不等式链：$H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$
中间的两个均值关系在国外论坛上通常写作**AM-GM Inequality**
几个结论:

- $M_p \to \max a_i, p \to +\infty$
- $M_p \to \min a_i, p \to -\infty$
- $M_p \to G_n, p \to 0$

幂平均关于p是单调的，即$p_1 < p_2 \Rightarrow M_{p_1} < M_{p_2}$这就是**幂平均不等式**

调和级数和欧拉常数

调和级数：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\to+\infty,n\to+\infty$

$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}\to1,n\to+\infty(Stolz)$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\gamma(Euler's\ \ constant)$

p级数

级数：数列求和就叫级数

p级数：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}$

$p\leq1,\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\to+\infty,n\to+\infty$

$p>1,\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$收敛

$p=2$，称作巴塞尔问题，$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$(微积分2会学怎么求)

压缩映射

见讲义，后面学中值定理会补充习题

有界变差数列

经典题，2014年北大数学系考研题，眼熟怎么做就ok了

Stolz

Stolz定理：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$，要求$b_n$严格单调且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

Stolz定理在估阶(渐进分析)中，以及处理含有数列的和(级数)的问题中经常用到

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

方法1：设$a_n=\frac{n^n}{n!}$, 即求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n},a_1=1$

设$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=(1+\frac{1}{n})^n\to e(n\to+\infty)$

$b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n=\frac{a_{n+1}}{a_1}=a_{n+1}$

$Cauchy$命题：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{n+1}}=e$(为什么？)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{n+1}}=e\iff\forall\varepsilon>0,\exists N_1,\forall n+1>N_1,|\sqrt[n]{a_{n+1}}-e|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e\iff\forall\varepsilon>0,\exists N_2=\max\{N_1-1,0\},\forall n>N_2,|\sqrt[n]{a_n}-e|<\varepsilon$

方法2：设 $\ln\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{n\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}$
$\sim\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-(n+1)}{n+1-n}(Stolz)=n\ln(\frac{n+1}{n})\to 1$

注意：连乘，阶乘，1^{∞}极限取对数往往有奇效

此题背景为斯特林公式(Stirling's approximation)

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^{n}(n\to+\infty)$$

杂题的思路收集

松弛变量

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$
可以尝试设$b_n=b+c_n,c_n\to 0$
我们就把一个极限"松弛"了，这是因为极限为0的时候有一些比较好的性质，而且往往能对题目做一些分析。
（当然也不是每个题都这么做）

取整函数

取整函数有关题常用手法：分区间讨论，确定取整式的值

夹逼定理

此类题最为灵活，后续可以和定积分等结合起来一起考，先不细讲

渐进分析

Stolz的例子，$na_n\to 1(n\to+\infty)$其实就是要证明$a_n\sim\frac{1}{n}$或者$\frac{1}{a_n}\sim n(n\to+\infty)$
我们把此类问题叫做估阶问题（渐进分析），因为本质上是在比较a_n与常见无穷大无穷小的阶

常见无穷大的阶:$n^n>n!>a^n(a>1)>n^k(k>0)>lnn$

最后一个例题比较难，第一问是在估计$a_n\sim\sqrt{2n}$
第二问则是做一个更精确的估计，本质上是估计$a_n\sim\sqrt{2n}$的**误差**
此题难度较高，竞赛压轴题也不过如此。。同学们自己把握