2024-2025学年微甲提高1班辅学讲义

#1 数列极限梳理与拓展

yuanhongyi2004 2024.10.18

基础回顾

- 数列极限定义：$\varepsilon-N$语言，无穷大数列

  定义 1.1.2 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数列. 如果存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \geqslant N$ 时, 都有

  $$|a_n - a| < \varepsilon,$$

  就称数列 $\{a_n\}$ 是收敛的并且收敛于 a (或趋于 a), 记为

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或者 \quad 当\ n\to\infty\ 时,\ a_n \to a.$$

  这时称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限. 如果上述条件不成立, 就称 $\{a_n\}$ 是发散的或者不收敛.

  有一类发散数列有着特殊的性质, 我们称其为无穷大数列.

  定义 1.1.19 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数列, 如果 $\forall M > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \geqslant N$ 时, $|a_n| > M$, 那么称 $\{a_n\}$ 为无穷大数列, 或称 $\{a_n\}$ 趋于 ∞, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

  特别地, 如果 $\forall M > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \geqslant N$ 时, $a_n > M$ (或者 $a_n < -M$), 就称 $\{a_n\}$ 趋于 $+\infty$ (或者 $-\infty$), 记为

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (或者\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

  定义的否定也要掌握

  几何意义？

- 数列极限性质：唯一性、有界性、保号性、四则运算（注意极限要存在才能用）

  定理 1.1.9 (有界性) 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 那么 $\{a_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得对于所有的 $n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $|a_n| \leqslant M$.

  定理 1.1.10 (保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 那么 $\forall p \in (0, a)$, $\exists N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $a_n > p > 0$.

  推论 1.1.11 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 当 $n \geqslant N \in \mathbb{N}_+$ 时, $a_n \geqslant 0$, 且 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $a \geqslant 0$.

  值得一提的是, 上述推论中,即使数列 $\{a_n\}$ 满足: 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ 且有极限 a, 也不能得出 $a > 0$. 例如: 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 满足 $\dfrac{1}{n} > 0$, 但其极限为零而非大于零.

- **证明数列收敛或求极限：单调有界原理，夹逼准则，Cauchy收敛原理**

  定理 1.2.6 (单调收敛准则) 若单调数列 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 必收敛.

  定理 1.1.15 (夹逼定理) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足当 $n \geqslant N_0 \in \mathbb{N}_+$ 时, 有 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

  定义 1.3.4 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一个数列. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $m, n \geqslant N$ 时,$|a_m - a_n| < \varepsilon$, 则称 $\{a_n\}$ 是柯西数列, 简称柯西列.

  定理 1.3.5 (柯西准则) 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数列, 则 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西数列.

注意：单调递增无上界的数列一定是正无穷（为什么？），柯西收敛原理的否定形式

课本例题、习题选讲

幂平均极限

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+9^n}$;

(4) 由于 $9=\sqrt[n]{9^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+9^n}<\sqrt[n]{9 \cdot 9^n}=9\sqrt[n]{9}$, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{9}=1$,

由夹逼定理则有

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+9^n}=9.$$

幂平均：

$$M_p\left(a_i\right)=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(a_i \geqslant 0,\ p \in \mathbf{R}\right)$$

为 a_i 的 p 次幂平均.

此外，不难发现，当 p 取特殊值时：

$$M_1\left(a_i\right)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \quad \text{（算术平均值）}$$

$$M_{-1}\left(a_i\right)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \quad \text{（调和平均值）}$$

$$\lim_{p \to 0} M_p\left(a_i\right)=\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \text{（几何平均值）}$$

$$\lim_{p \to +\infty} M_p\left(a_i\right)=\max\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\} \quad \text{（最大值）}$$

$$\lim_{p \to -\infty} M_p\left(a_i\right)=\min\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\} \quad \text{（最小值）}$$

简单证明:

$$
\begin{aligned}
\therefore \lim P(m) &= \lim_{m\to 0} \frac{N}{m} \\
&= \lim_{m\to 0} \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^m}{n} - 1}{m} \\
&= \frac{1}{n} \lim_{m\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^m - n}{m} \\
&= \frac{1}{n} \lim_{m\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i^m - 1)}{m} \\
(\lim_{m\to 0} \frac{t^m - 1}{m} &= \lim_{m\to 0} t^m \ln t = \ln t) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln a_i
\end{aligned}
$$

证毕。

16. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

Hint: $\frac{x}{x+1} \le \ln(1+x) \le x,\ x-\frac{1}{2}x^2 \le \ln(1+x) \le x$

Answer: $\sqrt{e}$

欧拉常数γ

(5) 利用单调有界准则证明下面极限存在: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$.

$$
\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \\
&= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n \\
&= \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \\
&> \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n \\
&= \ln\left[2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right]-\ln n \\
&= \ln(n+1)-\ln n>0.
\end{aligned}
$$

也即 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在.

(这里定义的极限的值即为欧拉常数 γ, 值约为0.5772...)

后面我们用Stolz定理证明调和级数和lnn是等价无穷大

p级数

例 1.3.7 证明数列 $\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 发散.

证明: 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 取 $m=2n$, 有

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\\&\geqslant\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

放缩证明发散: $\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

31. 证明数列 $\left\{\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ $(\alpha>1)$ 收敛.

证明: 令 $a_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$, 显然 a_n 单调增加.

再证明有上界. 由于 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $i\in\mathbb{N}_+$ 使得 $2^{i-1}\leq n<2^i$ 成立.

则应有 $\frac{1}{(2^i)^\alpha}<\frac{1}{n^\alpha}\leq\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}$ 成立. 此时对 a_n 进行加括号处理, 并进行放缩有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{1^\alpha}+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}+\frac{1}{(2^{i-1}+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right]\\&<1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}+\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{i-1})^\alpha}\right]\\&\leq1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\cdots+\frac{2^{i-1}}{(2^{i-1})^\alpha}\\&=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{i-1}\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^i}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}\\&<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}.\end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 有上界. 因此数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 从而收敛.

压缩映射

定理 1.1. 利用压缩映射原理求递推数列极限的两种方法:

(I) 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 我们只要证明:

$$|x_{n+1} - A| \leqslant k|x_n - A|, 0 < k < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant |x_{n+1} - A| \leqslant k^n|x_1 - A| \Rightarrow |x_n - A| \to 0 \Rightarrow x_n \to A.$$

(II) 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n)$, 我们证明:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant k|x_n - x_{n-1}|, 0 < k < 1$$

$\Rightarrow |x_{n+1} - x_n| \leqslant k^{n-1}|x_2 - x_1| \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 由 $A = f(A)$, 求解 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

没有学过级数，就用柯西收敛原理

36. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $n \geq 1$, 有 $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 由题可递推得

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_2 - a_1|.$$

由于 $|a_2 - a_1|$ 是常数, 记为 k, 则应有 $|a_{n+1} - a_n| \leq k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 成立.

对任意 $m, n \in \mathbb{N}_+$, $m > n$ 有

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq k\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} + \cdots + k\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right]}{1 - \frac{1}{2}} \cdot k \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot k \\
&= \frac{4k}{2^n} < \frac{4k}{n}.
\end{aligned}$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = \left[\frac{4k}{\varepsilon}\right] + 1$, 则对任意 $m > n \geq N$ 有

$$|a_m - a_n| < \frac{4k}{n} \leq \frac{4k}{N} < \varepsilon,$$

则 $\{a_n\}$ 是柯西列, 从而收敛.

例 1.2.13 已知数列 $\{u_n\}$ 满足: $u_1>0,\ u_{n+1}=3+\dfrac{4}{u_n}\ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛并求其极限.

(方法二) 由已知条件易知 $u_n>3,\ n=2,3,\cdots$, 所以

$$0<|u_{n+1}-4|=\frac{|u_n-4|}{u_n}<\frac{1}{3}|u_n-4|$$
$$<\frac{1}{3^2}|u_{n-1}-4|<\cdots<\frac{1}{3^n}|u_1-4|.$$

因为 $|u_1-4|$ 为一个常数, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}|u_1-4|=0$, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=4$.

26. 设数列 $\{u_n\}$ 由下式定义: $u_1=2,u_{n+1}=\dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}(n=1,2,\cdots)$. 试证数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明: 由题, $u_n>0$. 设 $a=\dfrac{a(a^2+3)}{3a^2+1}$, 解得 $a=0$ 或 $a=1$ 或 $a=-1$.

由于 $u_1=2,u_2=\dfrac{2\times(2^2+3)}{3\times 2^2+1}=\dfrac{14}{13}>1$, 则此时考虑该数列可能收敛于 1,

因此用数学归纳法尝试证明是否有 $u_n>1$ 成立.

假设对任意 $k\in\mathbb{N}_+$ 有 $u_k>1$, 则对 $u_{k+1}=\dfrac{u_k(u_k^2+3)}{3u_k^2+1}$,

$u_{k+1}-1=\dfrac{u_k^3+3u_k-3u_k^2-1}{3u_k^2+1}=\dfrac{(u_k-1)^3}{3u_k^2+1}>0$, 即有 $u_{k+1}>1$ 成立. 从而 $u_n>1$ 始终成立.

再考虑单调性, 此时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{u_n^2+3}{3u_n^2+1}=1+\dfrac{2-2u_n^2}{3u_n^2+1}<1$, 这里利用了 $u_n>1$ 的结论,

从而有 $u_{n+1}<u_n$, 则数列 $\{u_n\}$ 单调递减且有下界 1, 从而数列 $\{u_n\}$ 收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=b$, 则 $b=\dfrac{b(b^2+3)}{3b^2+1}$, 对应解得 $b=1$ 或 $b=-1$ (舍) 或 $b=0$ (舍),

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$. (求出的极限不能小于下界)

39. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $|a_{n+1}-a_n| \le cq^n$ $(c>0, 0<q<1)$, 试证 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 由题, 对任意 $m,n \in \mathbb{N}_+, m>n$, 有

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\le |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\
&\le cq^{m-1} + \cdots + cq^{n+1} + cq^n \\
&= \frac{cq^n(1-q^{m-n})}{1-q} \\
&< \frac{c}{1-q} q^n.
\end{aligned}$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = \left[\log_q \dfrac{\varepsilon(1-q)}{c}\right] + 1$, 则对任意 $m > n \ge N$ 有

$$|a_m - a_n| < \frac{c}{1-q} q^n \le \frac{c}{1-q} q^N < \varepsilon,$$

则 $\{a_n\}$ 是柯西列, 从而收敛.

有界变差数列

37. 证明: 对数列 $\{a_n\}$, 若存在常数 $c>0$, 使对任何 n, 有

$$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\le c,$$

则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 记 $b_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$, $n\in\mathbb{N}_+$.

由于 $b_{n+1}-b_n=|a_{n+2}-a_{n+1}|\ge 0$ 成立, 即 $\{b_n\}$ 单调增加;

又 $b_n\le c$, 则数列 $\{b_n\}$ 单调增加有上界, 从而 $\{b_n\}$ 收敛.

由柯西准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 对任意正整数 $m>n\ge N$ 有 $|b_m-b_n|\le\varepsilon$.

此时考虑 $\{a_n\}$, 对任意正整数 m,n 满足 $m>n\ge N$ 有

$$\begin{aligned}|a_{m+1}-a_{n+1}|&=|(a_{m+1}-a_m)+(a_m-a_{m-1})+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})|\\&\le|a_{m+1}-a_m|+|a_m-a_{m-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|\\&=b_m-b_n=|b_m-b_n|<\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 是柯西列, 从而收敛.

知识拓展

Stolz公式与柯西命题

设$\{x_n\}$,$\{y_n\}$为数列，且$\{y_n\}$严格单调地趋于$+\infty$,如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$$

- 算数平均形式:
  $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

- 几何平均形式：
  x_n收敛且$x_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

  解：记 $a=\lim_{n\to\infty}x_n$,则 $a\geq 0$

  若 $a>0$，则也有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$.用平均值不等式 $H\leq G\leq A$

  $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}}\leq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leq\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$

  令 $n\to\infty$ 并在两边用柯西命题，可见它们都收敛于 a ,因此得到 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=a$

  对于 $a=0$ 的情况则只要如上写出右边的不等式后再用柯西命题即可.

> 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

解：上述极限满足**stolz第一公式**,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln n-\ln(n-1)}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}\\=&1\end{aligned}$$

> 设$x_1\in(0,1),x_{n+1}=x_n(1-x_n),\forall n\geq 1$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$

解：可以由数学归纳法证明x_n为单调递减的有界数列,$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边取极限可以得到$x_n\to 0$.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1-x_{n-1}}}\\=&1\end{aligned}$$

- 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
  Hint: $a_n=\frac{n^n}{n!}$，Calculate: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$
  然后用柯西命题的几何形式，当然Stolz也可以做

杂题

松弛变量

2、若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$,则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1}{n} = ab$. (《数学分析新讲》P66 例11;《数学分析》(第4版)P57.17)

证明: $b_n = b + c_n$

则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(c_n+b)+a_2(c_{n-1}+b)+\ldots+a_n(c_1+b)}{n}$

$\frac{a_1(c_n+b)+a_2(c_{n-1}+b)+\ldots+a_n(c_1+b)}{n} = \frac{a_1c_n+a_2c_{n-1}+\ldots+a_nc_1}{n} + \frac{a_1b+a_2b+\ldots+a_nb}{n}$

$= \frac{a_1c_n+a_2c_{n-1}+\ldots+a_nc_1}{n} + b\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

上面的方法证明过 $\lim_{n\to\infty} b\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = ab$

则只需证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1c_n+a_2c_{n-1}+\ldots+a_nc_1}{n} = 0$

c_n 就是上种解法的 $b_n - b$,证明同上。

证得 $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_1c_n+a_2c_{n-1}+\ldots+a_nc_1}{n} = 0\ ,}$ 加绝对值后，an有界用上界放大，对cn用

则
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1c_n+a_2c_{n-1}+\ldots+a_nc_1}{n} + \lim_{n\to\infty} b\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$
$= ab$

3、设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,求证$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}{n^2} = \frac{a}{2}$.(《数学分析新讲》P67 例12)

*/*前面介绍了拆分数列法,应用到这题就能轻松解出*/*

令 $x_n = a + a_n$,易得 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\frac{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}{n^2} = \frac{(a_1+a)+2(a_2+a)+\ldots+n(a_n+a)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}a + \frac{\frac{1}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\ldots+\frac{n}{n}a_n}{n}$

*/*第二个等号右边的第一个分式用了等差数列求和公式，第二个分式上下同除了n*/*

$|\frac{\frac{1}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\ldots+\frac{n}{n}a_n}{n}| \le \frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{n}$

*/*通过放大，可以用之前的结论，使* $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\ldots+\frac{n}{n}a_n}{n} = 0$ **/*

故
$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}a + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\ldots+\frac{n}{n}a_n}{n} = \frac{1}{2}a + 0$
$= \frac{1}{2}a$

得证

取整函数

求$\lim\limits_{x\to0} x[\frac{1}{x}]$
Hint: $x-1\le[x]\le x$

夹逼定理

设 $x_1=1, x_2=\sqrt{\frac{1}{2}+1}, x_3=\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}+1}}, \cdots,$

$x_n=\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n-1}+\sqrt{\cdots\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}+1}}}}}$,证明$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在并求出来

解：由题易得 $x_n\ge1, x_n^2=\frac{1}{n}+x_{n-1}(n\ge2),$

现假设 $x_n\le1+\frac{5}{n}$, 当n=1时显然成立，设 $x_k\le1+\frac{5}{n}$, 则

$$\begin{aligned}x_{k+1}^2-(1+\frac{5}{k+1})^2&=\frac{1}{k+1}+x_k-(1+\frac{5}{k+1})^2\\&\le\frac{1}{k+1}+1+\frac{5}{k}-(1+\frac{5}{k+1})^2\\&=\frac{5}{k}-\frac{9}{k+1}-\frac{25}{(k+1)^2}\\&=\frac{-4k^2-24k+5}{k(k+1)^2}<0(k\ge1)\end{aligned}$$

所以 $x_{k+1}^2<(1+\frac{5}{k+1})^2\Rightarrow x_{k+1}<1+\frac{5}{k+1}$

所以 $1\le x_k\le1+\frac{5}{n}$,由夹逼定理得 $\lim_{x\to\infty} x_n=1$

Given that $c_0=\alpha\in(0,4), c_1=\beta\in(4,+\infty), c_{n+2}=\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n}, n\ge0$
Prove：the limit of $\{c_n\}$ exists and calculate $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$

设$a_n=2\sqrt{a_{n-1}}, a_0=c_0<4, b_n=\sqrt{2b_{n-1}}, b_0=c_1>4$
容易知道，a_n递增，b_n递减，均收敛到4
希望证明：$a_n\le c_{2n}\le b_n, a_n\le c_{2n+1}\le b_n, \forall n\in N^+$
即$a_n<\min\{c_{2n}, c_{2n+1}\}, b_n>\max\{c_{2n}, c_{2n+1}\}$
用数学归纳法：$a_0<\min\{c_0, c_1\}$设$a_k<c_{2k}, a_k<c_{2k+1}$
$c_{2k+2}=\sqrt{c_{2k+1}}+\sqrt{c_{2k}}>2\sqrt{a_k}=a_{k+1}>a_k$
$c_{2k+3}=\sqrt{c_{2k+2}}+\sqrt{c_{2k+1}}>2\sqrt{a_k}=a_{k+1}$
因此$a_{k+1}<\min\{c_{2k+2}, c_{2k+3}\}$
由归纳法得：$a_n<\min\{c_{2n}, c_{2n+1}\}, \forall n.$ 同理$b_n>\max\{c_{2n}, c_{2n+1}\}, \forall n$
因此$a_n\le c_{2n}\le b_n, a_n\le c_{2n+1}\le b_n, \forall n\in N^+$
由夹逼定理，c_n收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=4$

估阶

例5、 设$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$, 证明(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$

(2)求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(a_n-\sqrt{2n})}{lnn}$

解：(1)$a_1>0$，由数学归纳法易知$a_n>0$，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}>0$，$a_n$单调递增。

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$两边平方得$a_{n+1}^2-a_n^2=2+\frac{1}{a_n^2}$

假设数列$\{a_n\}$有上界，那么可设 $\lim_{x\to\infty}a_n=C$，代入递推公式得C=C+ $\frac{1}{C}$⇒ 0= $\frac{1}{C}$ ，矛盾，所以假设不成立，所以$\{a_n\}$无上界，所以 $\lim_{x\to\infty}a_n=+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n}\overset{stolz}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_{n-1}^2}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2+\frac{1}{a_{n-1}^2}\overset{海涅定理}{=\!=\!=\!=}\lim_{t\to+\infty}2+\frac{1}{t^2}=2$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$

(2) 由$a_{n+1}^2-a_n^2=2+\frac{1}{a_n^2}$可得$a_n^2=2(n-1)+\sum_k^{n-1}\frac{1}{a_k^2}$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(a_n-\sqrt{2n})}{lnn}\overset{有理化}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(a_n^2-2n)}{(a_n+\sqrt{2n})lnn}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sum_k^{n-1}\frac{1}{a_k^2}-2)}{(a_n+\sqrt{2n})lnn}$$

$$\overset{利用第一问结论n\to\infty时，a_n\sim\sqrt{2n}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_k^{n-1}\frac{1}{a_k^2}-2}{lnn}$$

$$\overset{stolz}{=\!=\!=}\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n^2}}{lnn-ln(n-1)}\overset{海涅定理}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n}}{lnn-ln(n-1)}$$

$$\overset{洛必达}{=\!=\!=}\frac{1}{4\sqrt{2}}\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$