积分不等式 总纲

构造积分上限函数

设$f(x)$在$[a,b]$上连续、递增，证明：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明：设辅助函数

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

显然$F(a)=0$。对任意$t\in[a,b]$，有

$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)$$

$$=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^t [f(t)-f(x)]\mathrm{d}x,\quad x\in[a,t]$$

因为$f(x)$单调递增，则$F'(t)\geq 0$，则$F(t)$单调递增，所以$F(b)\geq F(a)=0(b\geq a)$。因此

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

> **Tip**
>
> 也可以用积分中值定理

利用Lagrange

设$f(x)$在$[0,a]$上一阶连续可导，且$f(0)=0$，$f'(x)\le M$，证明:

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{2}a^2$$

证明:

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^a |f(x)-f(0)|\mathrm{d}x = \int_0^a |f'(\xi)x|\mathrm{d}x$$

$$\le M\int_0^a |x|\mathrm{d}x = \frac{M}{2}a^2$$

> **Tip**
>
> 本题用Lagrange中值定理来联系函数值和导数值

利用分部积分

设$f(x)$在$[0,a]$上一阶连续可导，且$f(0)=0$，$f'(x)\le M$，证明:

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{2}a^2$$

证明:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}(x-a) = \int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^a (a-x)|f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{M}{2}a^2$$

> **Tip**
>
> 本题用分部积分来联系函数值和导数值 增加常数让分部积分第一项等于0也是在定积分有关题目中经常使用的技巧

设f在$[0,1]$有二阶连续导数，$|f''(x)|\leqslant 1$，$\forall x\in[0,1]$。证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{24}$$

我们注意到：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|=\left|\int_0^1 f(x)d\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|$$

$$=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 f'(x)d\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 f''(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{24}$$

设 f 在 $[0,1]$ 有一阶导数且$|f'(x)-f'(y)|\leq|x-y|$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leq\frac{1}{12}.$$

证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$
=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[f'(x)-f'\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\right|
$$

$$
\leq\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12}.
$$

利用Taylor展开式

设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f''(x)<0$，证明：

$$
\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leq f(\frac{1}{3})
$$

证明

由泰勒公式，得

$$
f(t)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(t-\frac{1}{3}\right)^2
$$

其中ξ介于$\frac{1}{3}$与t之间，从而

$$
f(x^2)\leq f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)
$$

积分得

$$
\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leq f\left(\frac{1}{3}\right)
$$

设$f(x)$在$[a,b]$连续可导，$f(a)=f(b)=0,f'(x)\leq M$，证明：

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{M}{4}(b-a)^2
$$

证明

$$令\ F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad F'(a)=F'(b)=0,\quad F(a)=0,\quad F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=F(a)+F'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{F''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$$

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=F(b)+F'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{F''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2$$

$$\Rightarrow 0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{(b-a)^2}{8}\left[F''(\xi_2)-F''(\xi_1)\right]$$

$$\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{(b-a)^2}{8}\left|F''(\xi_2)-F''(\xi_1)\right|\leq\frac{M}{4}(b-a)^2.\ 证毕!$$

利用积分与求和统一

设$f'(x)$在$[0,1]$上连续，$|f'(x)|\leq M$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$$

证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right)\mathrm{d}x\right|$$

用Lagrange中值定理

$$\leq\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leq\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} M\left(\frac{i}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{M}{2n}$$

Tip

把积分变成求和，把求和变成积分，统一以后用拉格朗日。

Cauchy不等式

Cauchy不等式

设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，我们有柯西不等式:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geq\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明:方法很多，这里构造积分上限函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-\left(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2,\quad F(a)=0.$$

$$\Rightarrow F'(x)=f^2(x)\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t+\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\cdot g^2(x)-2\cdot\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)\cdot g(x)$$

$$=\int_a^x\left(f^2(x)g^2(t)+f^2(t)g^2(x)-2f(t)g(t)f(x)g(x)\right)\mathrm{d}t=\int_a^x(f(x)g(t)-f(t)g(x))^2\mathrm{d}t\geq 0$$

$$\Rightarrow F(x)\geq F(a)=0.\text{证毕!}$$

设$f'(x)$在$[0,1]$连续，且$f(1)-f(0)=1$，证明:

$$\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\geq 1$$

证明:

$$\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\int_0^1 1\mathrm{d}x\geq\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2=(f(1)-f(0))^2=1$$

Last update: December 11, 2024

积分不等式1

构造积分上限函数

期末范围内，证明积分不等式最常用而且最简单的一个方法，便是将积分上限（或下限）修改为x，构造出一个变上限（或变下限）积分函数，然后对其求导，研究单调性。

这个方法有两个最大的好处：

1. 将积分学问题转化为微分学问题；
2. 将静态问题转化为动态问题。

当然，**要保证变限积分可导的话，一般需要$f(x)$为连续函数，所以如果只告诉$f(x)$可积，则无法对$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$求导**，希望大家在做题的时候看清楚条件；

注：既然我们可以将上限b视为x，那么自然也可以将下限a视为x，构造一个“变下限积分函数”，在大多数题目中，构造变上限和变下限的效果是一样的，但也有极个别题会有一些区别。

例题1

设$f(x)$在$[a,b]$连续且单调递增，证明：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

并思考该不等式的几何意义。

Answer

证明： 设

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

显然$F(a)=0$

$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)$$

$$=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(t-a)[f(t)-f(\xi)]\text{（积分中值定理）}$$

由于$f(x)$单调递增，$t>\xi\in(a,t)$，则$F'(t)\geq 0$，所以$F(t)$单调递增，所以$F(b)\geq F(a)=0$。即证

几何意义，质心偏右

Tip

若将条件“$f(x)$连续”改为“$f(x)$可积”，该如何证明?

提示:

$$\Longleftrightarrow \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \geq 0$$

类题

设$f(x)$在$[0,+\infty)$连续、递增，证明：若$0<a<b$，则

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]$$

Answer

证明：构造函数

$$F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^x f(x)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^x [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\right]$$

注意到$0<t<x$，由于$f(x)$递增，所以$F'(x)\geq 0$

则$F(x)$单调增加，从而$F(b)\geq F(a)=0$，原不等式得证。

例题2

已知$f(x)$在连续可导，$0<f'(x)\leq 1$，$f(0)=0$，证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

Answer

证明:

$$\varphi(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

因为$f(0)=0$，$f'(x)>0$，所以$f(x)>0$。令$g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则

$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]$

因为$0<f'(x)\leq 1$，所以$g'(x)\geq 0$；当$x>0$时，$g(x)$单调递增，即$g(x)>0$。

从而得到$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，$\varphi(1)\geq\varphi(0)$，

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\geq 0$$

Note

注1：思考该不等式何时能够恰好取到等号?

分析取等条件和初值条件，可以得到$f'(x)\equiv 1\Rightarrow f(x)=x$

注2：该不等式称为“流行不等式”，它其实可以推广为一般形式

若$f(x)$在$[a,b]$连续可导，$0<f'(x)\leq\dfrac{2}{n+1}$，$f(a)=0$，则

$$\left[\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^2\geq\int_a^b f^{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$

证明从略

例题3

证明

$$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\mathrm{d}t\leq\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

Answer

证明：令

$$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$$

$$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=\begin{cases}>0, & 0<x<1\\ =0, & x=1\\ \leq 0, & x>1\end{cases}$$

可得$f(x)$的最大值为$f(1)$

$$f(x)\leq f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\leq \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

例题 4

设$f(x)$在连续且单调递减，证明：对任意的$a\in(0,1)$，均有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geq a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Answer

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,F(0)=F(1)=0$$

$$F'(x)=f(x)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(x)-f(\xi),\xi\in(0,1)$$

则$f(x)$在$(0,\xi)$上递增，在$(\xi,1)$上递减，所以$F(x)\geq 0$，即证。

Tip

注1：能否构造其它辅助函数?

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

注2：两边的积分区间不一样，能否通过统一积分区间的方式证明此题?

Let $x=at$

$$\Longleftrightarrow\ a\int_0^1 f(at)\mathrm{d}t\ge a\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

注3：请思考能否使用积分中值定理证明本题?

下一讲说

类题

设$f(x)$、$g(x)$在$[0,1]$连续可导，$f(0)=0$，$f'(x)>0$，$g'(x)>0$，证明：对于任意的$a\in[0,1]$，均满足

$$\int_0^a f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\ge f(a)g(1)$$

Answer

证明：

$$F(x)=\int_0^x f'(t)g(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1)$$

$F'(x)=f'(x)[g(x)-g(1)]$

因为$f'(x)>0,g'(x)>0$,所以$f(x),g(x)$在$[0,1]$上单调增加;

$\forall x\in(0,1),g(x)<g(1)$,从而$F'(x)<0,F(x)$在$[0,1]$上单调减少;

对$\forall a\in(0,1)$,

$$F(a)>F(1)=\int_0^1 f'(t)g(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(1)g(1)=0$$

即

$$\int_0^a f'(x)g(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx>f(a)g(1)$$

另解

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 (f'g+fg')\mathrm{d}x+\int_a^1 fg'\mathrm{d}x-f(a)g(1)\geq 0$$

$$\Longleftrightarrow f(a)[g(a)-g(1)]+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geq 0$$

$$\Longleftrightarrow -f(a)\int_a^1 g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=\int_a^1 [f(x)-f(a)]g'(x)\mathrm{d}x\geq 0$$

例题 5

证明**阿达玛 (Hadamard) 不等式**：若$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f''(x)\geq 0$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Answer

证法一

先证右边的不等式

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)\frac{f(a)+f(x)}{2},x\in[a,b]$$

$$F'(x)=f(x)-\frac{1}{2}(f(a)+f(x))-\frac{1}{2}f'(x)(x-a)=\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]-\frac{1}{2}f'(x)(x-a)$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)[f'(\xi)-f'(x)]\leq 0(\xi\in(a,x))$$

故$F(x)$为$[a,b]$上的减函数。$F(b)\geq F(a)=0$

对于左边的不等式，令

$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(\frac{a+x}{2}),x\in[a,b]$$

同理可证。

注1：这是强条件下的Hadamard不等式，如果是弱条件（没说可导），此时应该考虑“琴生不等式+定积分定义”

注2：泰勒展开构造切线不等式也能证

注3：2017年期末考试考过原题

例题 6

$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$连续，$f(x)$递增，$0 \le g(x) \le 1$，证明：

$$\int_a^{a+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Answer

证 构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)du$$

当$x \in (a,b)$时，由积分中值定理

$$F'(x)=f(x)g(x)-f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)g(x) \geqslant f(x)g(x)-f(a+x-a)g(x)=0$$

所以$F(x)$在$[a,b]$上单调递增，因此$F(b) \geqslant F(a)=0$，结论得证。

例题 7

证明**柯西 (Cauchy) 不等式**：若$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$连续，则

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

Cauchy 不等式

设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，我们有柯西不等式：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明：方法很多，这里构造积分上限函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \cdot \int_a^x g(t)\mathrm{d}t-\left(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2, \quad F(a)=0.$$

$$\Rightarrow F'(x)=f^2(x)\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t+\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\cdot g^2(x)-2\cdot\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)\cdot g(x)$$

$$=\int_a^x \left(f^2(x)g^2(t)+f^2(t)g^2(x)-2f(t)g(t)f(x)g(x)\right)\mathrm{d}t=\int_a^x (f(x)g(t)-f(t)g(x))^2\mathrm{d}t \ge 0$$

$$\Rightarrow F(x) \ge F(a)=0.\text{证毕！}$$

Note

柯西不等式成立的条件可以减弱为“$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$可积”，此时变限积分就不一定可导，需要更换证明方法。可行的方法非常多，比如利用判别式

注2：柯西不等式是最经典的积分不等式之一，以后的很多题目都可以直接用柯西不等式搞定。下面先看两个比较典型的题目。

类题1

设$f(x)$在连续且$f(x)>0$，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq 1$$

用Cauchy一步到位，略

类题2

请利用柯西不等式证明**闵可夫斯基(Minkowski)不等式**：设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proof

不等式两边平方

$$\iff \int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + 2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

把左边完全平方打开

$$\iff \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

即为柯西不等式，得证

例题8

(Chebyshev)

设$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$连续，且同为单调不减（或同为单调不增）的函数，证明：

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Proof

$$F(x)=(x-a)\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)g(x)-f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x [f(t)g(t)+f(x)g(x)-f(x)g(t)-f(t)g(x)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x [f(t)-f(x)][g(t)-g(x)]\mathrm{d}t\geq 0$$

所以$F(x)$单调增加，$F(b)\geq F(a)=0$，得证。

注1：如果f,g单调性相反，则不等式反向

注2：切比雪夫不等式原来的叙述是同序与反序，即$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq 0(\leq 0)$

类题

已知$f(x)$在$[a,b]$连续且递增，证明：

$$\int_a^b (\frac{b-x}{b-a})^n f(x)\mathrm{d}x\leq \frac{1}{n+1}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Answer

注1：参考答案是将a视为变量，构造“变下限积分”，大家可以尝试将b视为变量，看能否进行下去；

注2：此题的背景就是切比雪夫不等式

$$\iff \int_a^b (b-x)^n f(x)\mathrm{d}x\leq \frac{(b-a)^n}{n+1}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff (b-a)\int_a^b (b-x)^n f(x)\mathrm{d}x\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (b-x)^n\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Last update: December 11, 2024

积分不等式2

利用中值定理

用Lagrange中值定理

例题1

设$f(x)$在$[a,b]$上一阶连续可导，且$f(a)=0$，$|f'(x)|\le M$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{2}(b-a)^2$$

Answer

本题需要寻找函数值和导数值之间的联系，可以用Lagrange中值定理、分部积分、逆用N-L公式等方法

证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)-f(a)|\mathrm{d}x=\int_a^b|f'(\xi)(x-a)|\mathrm{d}x$$

$$\le M\int_a^b|x-a|\mathrm{d}x=\frac{M}{2}a^2$$

例题2

设$f(x)$在$[a,b]$上一阶连续可导，且$f(a)=f(b)=0$，$|f'(x)|\le M$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{4}(b-a)^2$$

Answer

注意到题目条件比较对称，因此我们模仿例题1的做法，把积分拆成两个，前一个对a点用Lagrange中值定理，后一个对b点用Lagrange中值定理。

这里我给一种用分部积分的做法

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right| = \left|\int_a^b f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\right| \le M\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x = \frac{M}{4}(b-a)^2$$

> 注：对例题1用分段的方法，可以证明不等式右边为$\dfrac{(b-a)^2}{4}M+\dfrac{b-a}{2}|f(b)|$

用Cauchy中值定理

例题3

已知$f(x)$在连续可导，$0<f'(x)\le 1$，$f(0)=0$，证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

Answer

设

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2, G(x)=\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$$

$$\Longleftrightarrow\ 1\le \frac{F(1)}{G(1)}=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}$$

再次利用柯西中值定理

$$=\frac{2f(\theta)}{2f(\theta)f'(\theta)}=\frac{1}{f'(\theta)}\ge 1$$

用积分中值定理

告诉$f(x)$单调性，可以考虑用积分中值定理

积分第一中值定理

若$f(x), g(x)$在$[a, b]$上连续，$g(x)$不变号，则存在$\xi \in (a, b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

在2022年微积分甲期末考试考过这个定理的证明

常常用简化版本:

$\exists c \in (a, b)$, s.t.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

例题4

设$f(x)$在连续且单调递减，证明：对任意的$a \in (0, 1)$，均有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geq a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Answer

如果直接使用积分中值定理，我们没法得到两个中值变量的大小关系，因此我们需要分割区间让两个中值变量不重叠

$$\iff \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geq a(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^1 f(x)\mathrm{d}x)$$

$$\iff (1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geq a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff (1-a)af(\xi_1) \geq a(1-a)f(\xi_2)\text{，其中}0 < \xi_1 < a < \xi_2 < 1$$

由单调性即证

例题5

设$f(x)$在$[a, b]$连续且单调递增，证明:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Hint

用中点分割区间，然后在两个区间上用积分第一中值定理，证明过程略

题外话：此题的背景其实是切比雪夫不等式

$$\iff (b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

用Taylor中值定理

例1

设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，$|f''(x)|\leq M$。证：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M}{24}\cdot(b-a)^3$$

Answer

证明 $f(x)$在$x=\dfrac{a+b}{2}$处的带Lagrange余项的Taylor公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中$a\leqslant\xi\leqslant b$。对等式两边求积分，利用$\int_a^b\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0$，得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

于是

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b|f''(\xi)|\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{M(b-a)^3}{24}.$$

> 评注：此题虽然不知道中点处的导数值等于多少，但是由于对称性，积分以后是0，比较巧妙

例 2

设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，$f(a)=f(b)=0$，$|f'(x)|\le M$，求证：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{12}(b-a)^3$$

Answer1

如果仿照上一题的做法，在a,b处展开，会出现比较尴尬的情况，就是我们不知道a,b处的导数值，因此我们需要将$a(b)$在x处展开！

证明 1 由 Taylor 公式，存在$\xi\in(a,b)$，使得

$0=f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2$

由于

$$\int_a^b f'(x)(a-x)\mathrm{d}x=\int_a^b (a-x)\mathrm{d}f(x)=f(x)(a-x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\mathrm{d}(a-x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

对展开式两边积分，得

$$0=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f''(\xi)(a-x)^2\mathrm{d}x$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{4}\left|\int_a^b f''(\xi)(a-x)^2\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{12}(b-a)^3$$

Answer2

此题亦可用分部积分法，注意题目条件是二阶导数的界，因此我们需要两次分部积分凑出二阶导数。

在分部积分的时候，我们需要用到前面所学的技巧，**往d后面加减一个常数，使得边界函数值为0**

证法2：因为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(x-a)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b(x-a)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b+\int_a^b(x-b)[f'(x)+(x-a)f''(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b(x-b)(x-a)f''(x)\mathrm{d}x+(x-b)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b(x-b)(x-a)f''(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b(x-b)(x-a)f''(x)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{2}M\int_a^b(b-x)(x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{12}M$$

注：在积分意义下，$f(x)$居然和$f''(x)$乘以一个二次函数相等，而且零点恰好为a,b，或许我们可以待定系数，留给同学们探究

例3

设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f''(x)<0$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leq f(\frac{1}{3})$$

Answer

证明

由泰勒公式，得

$$f(t)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(t-\frac{1}{3}\right)^2$$

其中ξ介于$\frac{1}{3}$与t之间，从而

$$f(x^2)\leq f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

积分得

$$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leq f\left(\frac{1}{3}\right)$$

推广：本题其实有比较深厚的**凹凸性背景**，不过留到后面再说，这里先做个简单的推广

> 设$f''(x)\leq 0$，证明
>
> $$\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x\leq f(\frac{1}{n+1})=f\left(\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\right)$$
>
> **注：积分号和f换序**

例 4

证明**阿达玛 (Hadamard) 不等式**：若$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f''(x)\geq 0$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Hadamard

先证明左边

由$f''(x)>0\Rightarrow f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$（切线不等式）

$\Rightarrow f(x)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x-\frac{a+b}{2})$

积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\iff f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

再证明右边

把a点在x点展开，得到切线不等式

$f(a)\geq f(x)+f'(x)(a-x)$，两边积分

$$(b-a)f(a)\geq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)(a-x)\mathrm{d}x$$

而

$$\int_a^b f'(x)(a-x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a-x)\mathrm{d}[f(x)-f(b)]=\int_a^b(f(x)-f(b))\mathrm{d}x$$

即

$$(b-a)f(a)\geq 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(b)$$

移项整理即得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

例5

设$f''(x)>0$，$(a<b)$，证明:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f[g(x)]\mathrm{d}x \geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$$

Answer

$f''(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

令$x\to g(x), x_0\to \dfrac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$有

$$f[g(x)]\geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)+f'\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)\left[g(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right]$$

不等式两边同时取a到b的积分，并且除以$b-a$，得到

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f[g(x)]\mathrm{d}x \geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$$

注：本题的背景是**Jensen不等式**，研究凸函数下积分平均见的不等关系

Note

依托例题5，我们命制出前面几个题

- 取$g(x)=x^2$，区间为$[0,1]$，得到$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\geq f(\dfrac{1}{3})$
- 取$g(x)=x$，区间为$[a,b]$，得到$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq f(\dfrac{a+b}{2})$

更多的，我们可以赋予外层函数(利用凹凸性的那个函数)以具体，比如

- 取$f(x)=\ln x$，区间为$[0,1]$，得到$\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x\leq \ln\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]$

Exercise

设$f(x)>0$，证明:

$$\int_0^1 [\ln f(x)]\mathrm{d}x\leq \ln\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]$$

Last update: December 11, 2024