套路二 三角有理函数的积分

（一） 三角有理函数积分的通用方法

一切三角有理函数的积分，只需利用万能公式，令$\tan(x/2)=t$，就总能将三角有理函数的积分化为有理函数的积分。而由于一切有理函数的积分方法我们都已经学会，所以——“从理论上来说”，三角有理函数的积分本身并没有本质上的困难；但就像前文所述，通法并不一定是好方法，利用万能公式计算三角有理函数的积分是下下策，因为这种解法的计算量往往会很大，尤其是被积函数的次数太高时，计算量是不可想象的。

所以，我们常常希望避开万能公式去求解三角有理函数的积分。当然，为了不出现知识盲区，我们还是以两道题目为例，来展示一下三角有理函数的万能公式解法。

例题 1 $\displaystyle\int \frac{1}{3+5\cos x}\mathrm{d}x$

例题 2 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

（二） 三角有理函数积分的特殊解法

我们一般都是具体问题具体分析，灵活使用三角函数的各种恒等变形和凑微分技巧，达到快速求解的目的。总的来说，有以下几个小技巧——

(1) 擅于使用“缩分母”技巧

如果分母为$1+\cos x$或者$1+\sin x$，那么我们可以尝试分子分母乘以共轭表达式，使分母从两项变为一项，达到“缩分母”的效果。因为，对于一个不定积分而言，如果分母项数太多，将是非常难于处理的；而如果分母只有一项，分子就算有很多项相加，我们也可以将整个积分拆分成若干个小积分，分别计算即可。所以，“缩分母”是一个很重要的思想。当然，除了乘以共轭表达式以外，还可以利用$1+\cos x$的二倍角公式，也能达到缩分母的效果。

例题 3 $\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

提示：本题可以分子+1-1 然后拆开，然后转化为上一题；也可以直接分子分母乘以$1-\sin x$。

类题 2 $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

注：辅助角公式$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$虽然用的频率不高，但是也需要记住，偶尔会产生奇效。

类题 3 $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

(2) 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\cos x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\sin x$

例题 4 $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}\mathrm{d}x$

例题 5 $\int\frac{\cos^3 x-2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

例题 6 $\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x$

注：本题除了利用$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$外，还可以使用分部积分，然后出现积分重现，即可解出我们需要的$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$了。利用这个思想，我们解决下面两个类题——

类题 1 $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

类题 2 请思考如何计算积分$I_n=\int \sec^n x\,\mathrm{d}x\,(n\geq 3)$

提示：分奇偶，$I_{2n}=\int \sec^{2n} x\,\mathrm{d}x$直接凑$\mathrm{d}\tan x$，很简单；$I_{2n+1}=\int \sec^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$的计算方法和$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$类似，也是“分部积分+积分重现”，然后得到$I_{2n+1}$和$I_{2n-1}$之间的递推关系。大家可以利用这个思想去计算一下$\int \sec^4 x\,\mathrm{d}x$和$\int \sec^5 x\,\mathrm{d}x$。

类题 3 请推导出积分$I_n=\int \tan^n x\,\mathrm{d}x$ $(n\geq 2)$的递推公式

类题 4 请推导出积分 $I_n=\int \sin^n x\,\mathrm{d}x \ (n\geqslant 2)$ 的递推公式

类题 5 根据类题 4 的结论，可推导出定积分中大名鼎鼎的“点火公式”——

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

(3) 若 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将 $\sin x$ 凑到 d 后面，变出 $\mathrm{d}\cos x$

注：这种情况和上面的情形类似，所以只用两个简单的例子作为说明即可。

例题 7 $\int\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 8 $\int \frac{5+4\cos x}{(2+\cos x)^2 \cdot \sin x}\mathrm{d}x$

(4) 若$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$，则可想办法制造出$\sec^2 x\mathrm{d}x$，凑出$\mathrm{d}\tan x$。我们有时候喜欢分子分母同时除以$\cos^2 x$，使分子出现$\sec^2 x\mathrm{d}x$，就是这个原因。

例题 9 $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 10 $\int \frac{1}{(3\sin x+2\cos x)^2}\mathrm{d}x$

例题 11 $\int \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 12 $\int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\mathrm{d}x$

注： 如果把被积函数中的分子分母颠倒，改为$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x$后，虽然也可以凑$\mathrm{d}\tan x$，但后续操作并不容易（当然，也能做）；但是若能灵活地使用二倍角公式，变为$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$，则后续操作会容易很多。这再一次体现了不定积分特别容易出现一题多解的情况，希望大家具体问题具体分析。

例题 13 $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(5) 对于形如$\int \frac{A\sin x + B\cos x}{C\sin x + D\cos x}\mathrm{d}x$的积分，我们一般假设“分子=$p\cdot$分母$+q\cdot$(分母)$'$”，解出$p$和$q$即可；

例题 14 $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$

注：本题当然也可以归结于$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$的类型，然后凑$\mathrm{d}\tan x$，同一个题有很多解法。

(6) 当被积函数中出现不用角度的三角函数时，我们一般先用倍角公式统一角度；

例题 15 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x}\mathrm{d}x$

例题 16 $\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin x + \cos x}dx$

(7) 对于形如$\int \sin ax \cdot \sin bx \, \mathrm{d}x \, (a \neq b)$之类的题，我们可以直接采用积化和差公式，一步秒杀。

例题 17 $\int \sin 2x \cdot \sin 3x \, \mathrm{d}x$

(8) 要善于使用二倍角公式处理三角有理函数的积分——当然，很多用到二倍角公式处理的题，本质上和使用万能公式换元没有区别，只是省略了换元的步骤而已，请大家自行体会这句话；

例题 18 $\int \frac{1}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x} \mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} \mathrm{d}x$

(9) 有些题，我也不知道归为哪一类，总之，具体问题具体分析，才是最核心的思想

例题 19 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

例题 20 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x$

例题 21 $\int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} \mathrm{d}x$

例题 22 $\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} \mathrm{d}x$

注： 本题涉及到了三角有理函数的裂项，它们没有通法（或许是我不知道），只有观察式子结构，不断尝试，类似的还有下面这道题。

例题 23 $\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \mathrm{d}x$（其中$\sin(a-b) \neq 0$）