NO.4-1 不定积分解题方法（上）

——有理函数和三角有理函数的积分

套路一 有理函数的积分

（一） 有理函数积分的通用方法

当遇到题目是有理函数的积分时，我们一般采用有理函数积分的标准解法——“裂项+待定系数法”，对于某些特定有理函数的积分，也许有更加“巧妙”的方法，我们后面的例题也会涉及；但是希望大家不要过于追求这种巧妙的解法，还是应当以基本方法为主；

至于裂项的时候怎么裂，这是很多同学一直都搞不懂的问题，我简要总结如下——

我们将有理函数从宏观上分为真分式和假分式，而任何一个假分式都可以通过多项式的除法变成多项式与真分式之和，由于多项式的积分是简单的，所以解决有理函数的积分，本质上就变成了解决有理真分式的积分。

而对于真分式的积分，我们有如下**固定套路**——

Step1 将该真分式分母进行因式分解(一直分解到无法再分解为止)；

Step2 然后进行裂项，裂项的原则为——

①只要分母中含有$(x-a)^k$，则裂项后的式子中一定含有$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$；

②只要分母中含有$(x^2+px+q)^k$(注:因为已经分解到不能再分解了，所以这里的$p^2-4q<0$)，则裂项后的式子中一定含有$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$

Step3 将裂项以后所得的所有项进行通分，根据“通分后的分子与原被积函数的分子的对应系数相等”的原则，列出待定系数满足的方程，然后解出待定系数。这样，就将真分式分解成了各个基本分式之和。

Step4 对于①中所得到的的一系列基本分式，它们的积分十分容易；

对于②中所得到的一系列基本分式，其计算稍微复杂一点，但其实所有形如$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$的积分，求解也有通用方法；尤其是在期末范围内，分母中的k要么为 1，要么为 2，不可能更高，所以我们只需要把$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的计算学会就可以了。我们在下面的例题 1 和例题 2 中，会详细介绍这两个积分的计算方法。至此，整个有理函数的积分便已找到了一个完善的方法。

总之，通过裂项，最终会归结于计算$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的三类积分。

例题 1 $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$

注：通过该题，可以总结出一切$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$的积分，其套路为“改造分子，拆分为两个积分，其中第一个积分直接凑微分，第二个积分配方后套公式即可”。

例题 2 $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

提示：三角换元当然可行，下面的类题也是如此，大家可以尝试一下。但是，本题是否有其它方法？

再提示：分母次数太高了，有没有什么办法可以降低分母的次数呢？（答：分部积分!）

类题 $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

注 1: 通过以上 2 题,可以推出所有 $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$ 的积分的计算方法,如计算 $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+10)^2}\mathrm{d}x$。其方法可以总结为:"改造分子、拆分为两个积分➞对分母配方、换元➞归结于计算 $\int \frac{1}{(a^2+t^2)^2}\mathrm{d}t$";

注 2: 思考,所有形如 $\int \frac{x^2}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$ 的积分,又该如何计算?

至此,$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ 和 $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$ 这三类积分的求解方法我们都已经学会,铺垫已大功告成。所以对于一切有理函数积分,我们都已经找到了完整的解题套路。下面看几道典型的例题

例题 3 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$

例题 4 $\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$

例题 5 若不定积分$\int \frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$的结果中不含反正切函数，求$a$

（二） 有理函数积分的特殊解法

从理论上而言，一切有理函数积分都可以用上面的待定系数法去硬肛，但是，通法不一定是最优解法，待定系数法的工作量往往很大。很多有理函数的积分都有着自己独特的解法，这些解法不能一概而论，需要我们仔细分析被积函数的结构，**具体问题具体分析**。大家一定要记住，学数学是一个“积累”的过程，下面的很多解法都比较灵活，但希望大家不要产生畏难情绪。

例题 6 $\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

注：我们在进行有理函数积分时，有时候会**根据分母的形式，去改造分子**，同样可以实现“裂项”的目的。

类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int \frac{1}{x^{8}(1+x^{2})}\mathrm{d}x$

注：本题用倒代换$x=\frac{1}{t}$也可以做，大家可以尝试一下。(倒代换一般适用于分母的次数远高于分子时)

类题 2 $\int \frac{1+x^{4}}{1+x^{6}}\mathrm{d}x$ (一道神仙题，最后一步侮辱智商)

类题 3 $\int \frac{1}{x(x^{3}+27)}\mathrm{d}x$

例题 7 $\int \frac{1+x^{2}}{1+x^{4}}\mathrm{d}x$

注 1：本题非常经典，其解法颇具特色。通过这个题目，我们可以解决所有形如$\int \frac{1 \pm x^2}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$的积分；

注 2：本题也可以对$1+x^4$强行因式分解，变为$1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2=\left(1+x^2+\sqrt{2}x\right)\left(1+x^2-\sqrt{2}x\right)$，但是该解法在裂项后计算系数时运算量太大，不太理智。

类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

注：利用以上两题，我们可求出积分$\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x + \int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\cdots$

类题 2 $\int \frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$