NO.4-1 不定积分解题方法（上）

套路一 有理函数的积分

（一） 有理函数积分的通用方法

例题 1 $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|+2\int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$

例题 2 $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

解： $I=-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\frac{1}{x^2+a^2})=-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a}+C$

类题 $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

解： 使用三角换元，令 $x=a\tan t$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$I=\int \frac{1}{a^4\sec^4 t}\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^3}\int(\cos 2t+1)\mathrm{d}t=\frac{1}{4a^3}\sin 2t+\frac{t}{2a^3}+C$

$=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+C$

注： 换元后一定要回代，回代!!!

例题 3 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$ (此为 2019 年的一道 10 分大题，居然只有一个考点，出题人真是极其无聊)

解： $\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$

$=\frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

可得 $\begin{cases} A+C=0 \\ 3B=9(x=1\text{代入}) \\ B-2C+D=0 \\ -A+B+D=6(x=0\text{代入}) \end{cases}$ 解得 $A=-2,B=3,C=2,D=1$

$I=-2\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+\ln|x^2+x+1|+C$

例题 4 $\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$

解： $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1-x}$

可得$1=A(x^2+1-x)+(Bx+C)(x+1)$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$ 解得$A=\frac{1}{3},B=-\frac{1}{3},C=\frac{2}{3}$

$$I=\int\frac{1}{(x+1)(x^2+1-x)}\mathrm{d}x=\int(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2+1-x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+1-x|+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+1-x|+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+1-x|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+C$$

例题 5 若不定积分$\int\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$的结果中不含反正切函数，求$a$

解： $\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2+1}$

原积分$I=A\ln|x|+\frac{B}{2}\ln|x^2+1|+D\arctan x+C$

可得$A(x^2+1)+(Bx+D)(x+1)=x^2+ax+2$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ B+D=a \\ A+D=2 \end{cases}$$ 解得$A=\frac{3-a}{2},B=\frac{a-1}{2},D=\frac{a+1}{2}$

若使得原积分不含反正切函数，则$D=0$即$a=-1$

（二） 有理函数积分的特殊解法

例题 6 $\int\frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

解： $I=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)(1-x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{1}{2}\arctan x+C$

类题 1 $\int\frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$

解： $I=-\int\frac{x^8-1-x^8}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\int\frac{(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x+\arctan x+C$

$$=-\int\frac{x^6+x^2-x^4-1}{x^8}\mathrm{d}x+\arctan x+C=\frac{1}{x}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^5}-\frac{1}{7x^7}+\arctan x+C$$

注： 本题使用倒代换也可，具体操作如下：

令$x=\frac{1}{t}$，则$\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$$I=\int \frac{1}{\frac{1}{t^8}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int \frac{t^8}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int [(t^4+1)(t^2-1)+\frac{1}{t^2+1}]\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+t-\arctan t+C=-\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C$$

我们发现这两种方法求出的原函数竟然不一样!!! 这里我们知道由于方法可能会不定积分的答案不唯一，答案会相差一个常数，所以只要求导回去得到原来的被积函数，答案都是对的。

不过这里我们介绍一个恒等式你就明白为什么。

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2},x>0\\ -\frac{\pi}{2},x<0\end{cases}$$

类题 2 $\int \frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x$ (一道神仙题，最后一步侮辱智商)

解： $I=\int \frac{1+x^4-x^2+x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\arctan x+\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(x^3)^2}\mathrm{d}(x^3)=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$

类题 3 $\int \frac{1}{x(x^3+27)}\mathrm{d}x$

解： $I=\frac{1}{27}\int \frac{x^3+27-x^3}{x(x^3+27)}\mathrm{d}x=\frac{1}{27}\ln|x|-\frac{1}{81}\ln|x^3+27|+C$

例题 7 $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$

注： 数是连续的，而其原函数却含有间断点，引入了无定义点，此处需要补充定义。

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

故 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C,x>0\\ C,x=0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C,x<0\end{cases}$ 才是其原函数

类题 1 $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

解：$I=-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$

类题 2 $\int\frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$

解：$I=\int\frac{1+x^2-x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+x^4-x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\arctan x^3=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2+1-x^2}{1+x^4-x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\arctan x^3$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\arctan x^3$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3}-\frac{1}{3}\arctan x^3$

$=\frac{1}{2}\arctan(x-\frac{1}{x})-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{3}\arctan x^3+C$

套路二 三角有理函数的积分

（一） 三角有理函数积分的通用方法

例题 1 $\int\frac{1}{3+5\cos x}\mathrm{d}x$

解：使用万能公式，令$u=\tan\frac{x}{2}$

$$I=\int\frac{1}{3+5\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{4-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\int\frac{2+u+2-u}{4-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-u}+\frac{1}{2+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+2}{u-2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+2}{\tan\frac{x}{2}-2}\right|+C$$

例题 2 $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解：使用万能公式，令$u=\tan\frac{x}{2}$

$$I=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u=\ln|u+1|+C=\ln|\tan\frac{x}{2}+1|+C$$

（二） 三角有理函数积分的特殊解法

例题 3 $\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\tan\frac{x}{2}+C$

类题 1 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{4u}{(1+u^2)(u+1)^2}\mathrm{d}u=2\int \frac{(u+1)^2-(1+u^2)}{(1+u^2)(u+1)^2}\mathrm{d}u$

$=2\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u-2\int \frac{1}{(u-1)^2}\mathrm{d}u=2\arctan u+\frac{2}{u-1}+C=2\arctan(\tan\frac{x}{2})+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-1}+C$

类题 2 $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})|+C$

类题 3 $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|\sin(x+\frac{\pi}{4})|+\frac{1}{2}x+C$

例题 4 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|-\frac{1}{\sin x}+C$

例题 5 $\int \frac{\cos^3 x-2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int \frac{\cos^2 x-2}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\mathrm{d}(\sin x)=-\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\mathrm{d}(\sin x)=-\int \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+1+\frac{1}{u^2}}\mathrm{d}u$

$=-\int \frac{1}{(u-\frac{1}{u})^2+3}\mathrm{d}(u-\frac{1}{u})=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{3}})+C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sin x-\frac{1}{\sin x}}{\sqrt{3}}\right)+C$

例题 6 $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$

解： $I=\int \sec x\,\mathrm{d}\tan x=\sec x\tan x-\int \sec x\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\sec x\tan x-\int \sec x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$=\sec x\tan x+\int \sec x\,\mathrm{d}x-I$

故 $I=\dfrac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$

类题 1 $\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}\,dx$

解： $I=x\sqrt{1+x^2}-\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})dx$

$=x\sqrt{1+x^2}-I+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$

故 $I=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|)+C$

类题 2 请思考如何计算积分 $I_n=\displaystyle\int\sec^n x\,dx\,(n\geq 3)$

解： $I_n=\displaystyle\int\sec^{n-2}x\,d(\tan x)=\tan x\cdot\sec^{n-2}x-(n-2)\int\tan^2 x\cdot\sec^{n-2}x\,dx$

$=\tan x\cdot\sec^{n-2}x-(n-2)\displaystyle\int(\sec^2 x-1)\sec^{n-2}x\,dx=\tan x\cdot\sec^{n-2}x-(n-2)(I_n-I_{n-2})$

故 $I_n=\dfrac{1}{n-1}\tan x\cdot\sec^{n-2}x+\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

其中 $I_1=\ln|\sec x+\tan x|+C,\quad I_2=\tan x+C$

类题 3 请推导出积分 $I_n=\displaystyle\int\tan^n x\,dx$ $(n\geq 2)$ 的递推公式

解： $I_n=\displaystyle\int\tan^{n-2}x(\tan^2 x+1)dx-I_{n-2}=\int\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 x\,dx-I_{n-2}=\int\tan^{n-2}x\,d(\tan x)-I_{n-2}$

$=\dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$

其中 $I_0=x+C,\quad I_1=-\ln|\cos x|+C$

类题 4 请推导出积分 $I_n=\displaystyle\int\sin^n x\,dx$ $(n\geq 2)$ 的递推公式

解： $I_n-I_{n+2}=\displaystyle\int\sin^n x(1-\sin^2 x)dx=\int\sin^n x\cdot\cos^2 x\,dx=\frac{1}{n+1}\int\cos x\,d(\sin^{n+1}x)$

$=\dfrac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\cos x+\dfrac{1}{n+1}I_{n+2}$

故 $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n-\dfrac{1}{n+2}\sin^{n+1}x\cos x$ 即 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}-\dfrac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x$

其中 $I_1=-\cos x+C,\quad I_0=x+C$

类题 5 根据类题 4 的结论，可推导出定积分中大名鼎鼎的“点火公式”——

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\qquad, n\text{为奇数}\\[2ex]\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\text{为偶数}\end{cases}$$

例题 7 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \csc x \, \mathrm{d}(\tan x) = \csc x \tan x + \int \tan x \cdot \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = \csc x \tan x + \ln|\csc x - \cot x| + C$

例题 8 $\int \frac{5 + 4\cos x}{(2 + \cos x)^2 \cdot \sin x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{(5 + 4\cos x)\sin x}{(2 + \cos x)^2 \sin^2 x} \mathrm{d}x = -\int \frac{5 + 4\cos x}{(2 + \cos x)^2 (1 - \cos^2 x)} \mathrm{d}(\cos x)$

$= -\int \frac{(2 + \cos x)^2 + (1 - \cos^2 x)}{(2 + \cos x)^2 (1 - \cos^2 x)} \mathrm{d}(\cos x) = -\int \frac{1}{1 - \cos^2 x} \mathrm{d}(\cos x) - \int \frac{1}{(2 + \cos x)^2} \mathrm{d}(\cos x + 2)$

$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + \frac{1}{2 + \cos x} + C$

例题 9 $\int \frac{1}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\tan^2 x + 2} \mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$

例题 10 $\int \frac{1}{(3\sin x + 2\cos x)^2} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{\sec^2 x}{(3\tan x + 2)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(3\tan x + 2)^2} \mathrm{d}(3\tan x + 2) = -\frac{1}{3(3\tan x + 2)} + C$

例题 11 $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \mathrm{d}x$

解： 当 $a \neq 0, b = 0$ 时 $I = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2} \cot x + C$

当 $a = 0, b \neq 0$ 时 $I = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{b^2} \tan x + C$

当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时 $I = \int \frac{1}{a^2 \tan^2 x + b^2} \mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{ab} \arctan(\frac{a}{b} \tan x) + C$

例题 12 $\int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^4 x} \mathrm{d}x = \int (\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}) \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^4 x} \mathrm{d}x$

$= -\cot x + \tan x - \int \csc^2 x \, \mathrm{d}(\cot x) = -\cot x + \tan x - \int (\cot^2 x + 1) \mathrm{d}(\cot x)$

$= -2\cot x + \tan x - \frac{1}{3} \cot^3 x + C$

例题 13 $\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{1}{2\sin^2 x + \cos^2 x} \mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} \mathrm{d}x + \arctan(\sin x)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + \int \frac{\sec x \tan x}{\tan^2 x + \sec^2 x} \mathrm{d}x + \arctan(\sin x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\int\frac{1}{2\sec^2 x-1}\mathrm{d}(\sec x)+\arctan(\sin x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sec x-1}{\sqrt{2}\sec x+1}\right|+\arctan(\sin x)+C$$

例题 14 $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int\frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$

例题 15 $\int\frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x}\mathrm{d}x$

解： $I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sec x\,\mathrm{d}(\cot x)=-\frac{1}{2}\sec x\cot x+\frac{1}{2}\int\cot x\cdot\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\sec x\cot x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$$

例题 16 $\int\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int(\cos x-\sin x+\frac{1-(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x})\mathrm{d}x$

$$=2\cos x+\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=2\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\mathrm{d}x$$

$$=2\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})|+C$$

例题 17 $\int\sin 2x\cdot\sin 3x\,\mathrm{d}x$

解： $I=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 5x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{10}\sin 5x+C$

例题 18 $\int\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\tan\frac{x}{2}+C$

类题 1 $\int\frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x}\mathrm{d}x$

解： $I=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|-\frac{1}{2\sin x}+C$

类题 2 $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

解： 使用万能公式

$$I=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u=\ln|u+1|+C=\ln|\tan\frac{x}{2}+1|+C$$

例题 19 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

解： $I = \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\csc(x + \frac{\pi}{4}) - \cot(x + \frac{\pi}{4})\right| + C$

注： $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x$

$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x$

例题 20 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{\tan x \sec^2 x}{\tan^4 x + 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\tan^4 x + 1} \mathrm{d}(\tan^2 x) = \frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x) + C$

例题 21 $\int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{\sec^6 x}{\tan^6 x + 1} \mathrm{d}x = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^6 x + 1} \mathrm{d}(\tan x) = \int \frac{(\tan^2 x + 1)^2}{\tan^6 x + 1} \mathrm{d}(\tan x)$

$= \int \frac{\tan^4 x + 1 + 2\tan^2 x}{\tan^6 x + 1} \mathrm{d}(\tan x) = \int \frac{\tan^4 x + 1 - \tan^2 x + 3\tan^2 x}{\tan^6 x + 1} \mathrm{d}(\tan x)$

$= \int \frac{1}{\tan^2 x + 1} \mathrm{d}(\tan x) + \int \frac{1}{(\tan^3 x)^2 + 1} \mathrm{d}(\tan^3 x) = x + \arctan(\tan^3 x) + C$

注： 熟记公式$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$和立方和立方差公式

例题 22 $\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} \mathrm{d}x$

解： $I = \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)} \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}\int \frac{(\sin x + \cos x)^2 + 2(1 - \sin x\cos x)}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x\cos x} \mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{1 + (\sin x - \cos x)^2} \mathrm{d}(\sin x - \cos x) + \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} \mathrm{d}x$

$= \frac{2}{3}\arctan(\sin x - \cos x) + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln\left|\csc(x + \frac{\pi}{4}) - \cot(x + \frac{\pi}{4})\right| + C$

例题 23 $\int \frac{1}{\sin(x + a)\sin(x + b)} \mathrm{d}x$ （其中$\sin(a - b) \neq 0$）

解： $I = \frac{\int \frac{\sin[(x + a) - (x + b)]}{\sin(x + a)\sin(x + b)} \mathrm{d}x}{\sin(a - b)} = \frac{\int \frac{\sin(x + a)\cos(x + b) - \cos(x + a)\sin(x + b)}{\sin(x + a)\sin(x + b)} \mathrm{d}x}{\sin(a - b)}$

$= \frac{1}{\sin(a - b)} \ln\left|\frac{\sin(x + b)}{\sin(x + a)}\right| + C$

NO.4-2 不定积分解题方法（下）

套路三 换元法的基本套路

（1）整体换元

例题 1 $\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$

解： 令 $\sqrt{\frac{x}{x+1}}=t$

$$原式=\int t\,\mathrm{d}\frac{1}{1-t^2}=\frac{t}{1-t^2}+\int\frac{1}{t^2-1}\mathrm{dt}=\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=(x+1)\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right|+C$$

类题 1 $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$

解： 令 $\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t$

$$原式=\int(t^2-1)t\,\mathrm{d}\frac{1}{t^2-1}=t-\int\frac{1}{t^2-1}(3t^2-3)+2\,\mathrm{d}t$$

$$=t-\left[3t+2\int\frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t\right]$$

$$=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right|+C$$

类题 2 请计算 $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\mathrm{d}x$ 两个积分

解： (1)原式 $=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

(2)原式 $=\int(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}})\mathrm{d}x=\int\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\arcsin x+C$

类题 3 $\int\frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x$

解： 令 $\sqrt{e^x-2}=t$

$$原式=\int\frac{\ln(2+t^2)}{t}(2+t^2)\frac{2t}{(2+t^2)}\mathrm{d}t=2\int\ln(2+t^2)\mathrm{d}t=2t\ln(2+t^2)-2\int t\cdot\frac{2t}{(2+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=2t\ln(2+t^2)-4t+2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=2x\sqrt{e^x-2}-4\sqrt{e^x-2}+2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{e^x-2}}{\sqrt{2}}+C$$

类题 4 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$

解： 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$

原式 $=-\int \frac{t(t^3-1)^2 6t^2}{(t^3-1)^2 4t^2}\mathrm{d}t=-\int \frac{3}{2}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$

例题 2 $\int \frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解： 令 $x=t^6$

原式 $=\int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3}\mathrm{d}t=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6t-6\arctan t+C=6x^{\frac{1}{6}}-6\arctan x^{\frac{1}{6}}+C$

类题 $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}}\mathrm{d}x$

解： 令 $t=e^{\frac{x}{6}}$

原式 $=\int \frac{1}{1+t^3+t^2+t}\frac{6}{t}\mathrm{d}t=6\int \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C=x-3\ln\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)-\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{\frac{x}{3}}\right)-3\arctan e^{\frac{x}{6}}+C$

（2）三角换元

例题 3 $\int \frac{1}{x^4}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

解： 令 $x=2\sin t$

原式 $=\int \frac{2\cos t}{16\sin t^4}\cdot 2\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int \frac{\cos t^2}{\sin t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int \frac{\sec t^2}{\tan t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\tan t^4}\mathrm{d}\tan t=-\frac{1}{12}\tan t^{-3}+\mathrm{C}$

$=-\frac{1}{12}\tan\arcsin\frac{x}{2}^{-3}+C$

例题 4 $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x$

解： 令 $x=\tan t$

原式 $=\int \frac{1}{\sec t^3}\sec t^2\mathrm{dt}=\int \cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

例题 5 $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x$

解： 令 $x-2=2\sin t$

原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx=\int 1\mathrm{d}t=t+C=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$

例题 6 $\int x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$

解： 令$x-1=\sin t$

$$原式=\int(\sin t+1)\cos t^2\mathrm{d}t=-\int\cos t^2\mathrm{d}\cos t+\int\cos t^2\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}\cos t^3+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-(x-1)^2}^3+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)+\frac{1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2}(x-1)+C$$

例题 7 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

解： 令$x=\sec t$

$$原式=\int\frac{\sec t\tan t}{\sec t^2\tan t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sec t}\mathrm{d}t=\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C$$

类题 1 $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}\mathrm{d}x$

解： 令$x=\dfrac{1}{t}$

$$原式=-\int\frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{\sqrt{1+(t+1)^2}}\mathrm{d}(t+1)$$

$$=-\ln\left|t+1+\sqrt{1+(t+1)^2}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}+1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}\right|+C$$

类题 2 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{2x^2+2x+1}}\mathrm{d}x$

解： 令$x=\dfrac{1}{t}$

$$原式=-\int\frac{t+1-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sqrt{1+(t+1)^2}}\mathrm{d}(t+1)-\int\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\ln\left|t+1+\sqrt{1+(t+1)^2}\right|-\sqrt{t^2+2t+2}+C$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}\right|-\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}+C$$

套路四 分部积分法的基本套路

例题 1 $\displaystyle\int x\cdot\arctan x\mathrm{d}x$

解： 原式$\displaystyle==\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\arctan x\cdot(x^2+1)-\frac{x}{2}+C$

类题 $\displaystyle\int x\cdot\ln(1+x^2)\cdot\arctan x\mathrm{d}x$

解： 原式$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\arctan x\ln(x^2+1)\mathrm{d}(x^2+1)$

$$=\frac{1}{2}\arctan x\cdot(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int(x^2+1)\left[\frac{2x}{x^2+1}\arctan x+\ln(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x\cdot(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int\arctan x\,\mathrm{d}\,(x^2+1)-\frac{1}{2}\int\ln(x^2+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x\cdot(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x(x^2+1)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\int\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x\cdot(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x(x^2+1)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)+x-\arctan x+\mathrm{C}$$

例题 2 $\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\sin x\,\mathrm{d}e^x=\sin xe^x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=\sin xe^x-\int\cos x\,\mathrm{d}e^x$

$$=\sin xe^x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x\sin x-\frac{1}{2}e^x\cos x+C$$

类题 $\int x\cdot\mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}e^x(\sin x-\cos x)=\frac{x}{2}e^x(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^x(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{x}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}e^x\cos x+C$$

例题 3 $\int\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

解： 原式 $=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2-\int\frac{2x\ln\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2-\int 2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x+C$$

套路五 换元法+分部积分

例题 1 $\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

解： 令 $\sqrt{e^x-1}=t$

原式 $=\int\arctan t\cdot\frac{2t}{1+t^2}(1+t^2)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\arctan t\,\mathrm{d}(1+t^2)^2=\frac{(1+t^2)^2}{2}\arctan t-\frac{1}{2}\int 1+t^2\mathrm{d}t$

$$=\frac{(1+t^2)^2}{2}\arctan t-\frac{t^3}{6}-\frac{t}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{(e^x-1)^{\frac{3}{2}}}{6}-\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}+C$$

类题 1 请计算 $\int\frac{x\cdot\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ 和 $\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

解： (1)令 $x=\tan t$

$$原式=\int\frac{\tan t\cdot e^{t}}{\sec t^{3}}\sec t^{2}\mathrm{d}t=\int\sin t\cdot e^{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^{t}\sin t-\frac{1}{2}e^{t}\cos t+C=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^{2}}}+C$$

(2)令$x=\tan t$

$$原式=\int\frac{e^{t}}{\sec t^{3}}\sec t^{2}\mathrm{d}t=\int\cos t\cdot e^{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^{t}\sin t+\frac{1}{2}e^{t}\cos t+C=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{x+1}{\sqrt{1+x^{2}}}+C$$

类题 2 $\int\frac{\ln x}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

解： 令$x=\tan t$

$$原式=\int\frac{\ln\tan t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int\cos t\ln\tan t\,\mathrm{d}t=\int\ln\tan t\,\mathrm{d}\sin t=\sin t\ln\tan t-\int\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\sin t\ln\tan t-\ln|\sec t+\tan t|+C=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}\ln x-\ln\left|\sqrt{x^{2}+1}+x\right|+\mathrm{C}$$

类题 3 请计算$\int\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$和$\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$

解： (1)令$\sqrt{x-1}=t$

$$原式=2\int\frac{t^{2}\arctan t}{1+t^{2}}\mathrm{d}t=2\int\arctan t\,\mathrm{d}t-2\int\frac{\arctan t}{1+t^{2}}\mathrm{d}t=2\ln(1+t^{2})-(\arctan t)^{2}+C$$

$$=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x-\left(\arctan\sqrt{x-1}\right)^{2}+C$$

(2)令$\sqrt{x-1}=t$

$$原式=\int\frac{t^{2}\arctan t}{1+t^{2}}\mathrm{d}t=2\int\arctan t\,\mathrm{d}t-2\int\frac{\arctan t}{1+t^{2}}\mathrm{d}t=2t\arctan t-\ln(1+t^{2})+(\arctan t)^{2}+C$$

$$=2t\arctan\sqrt{x-1}-\ln x+\left(\arctan\sqrt{x-1}\right)^{2}+C$$

例题 2 $\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x$

解： 令$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$

$$原式=\int\ln(1+t)\,\mathrm{d}\frac{1}{t^{2}-1}=\frac{\ln(1+t)}{t^{2}-1}-\int\frac{1}{t+1}\frac{1}{t^{2}-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^{2}-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2t+2}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^{2}}+C$$

类题 1 $\int\arctan\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

解： 令$\sqrt{x}=t$

$$原式\int\arctan(1+t)\mathrm{d}t^{2}=t^{2}\arctan(1+t)-\int\frac{t^{2}+2t+2-2t-2}{t^{2}+2t+2}\mathrm{d}t$$

$$=t^{2}\arctan(1+t)-t+\ln(t^{2}+2t+2)+C$$

类题 2 $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

解： 原式 $=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$=x\sqrt{1+x^2}-$ 原式 $+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C$

套路六 利用分部积分，对分母进行降阶

例题 1 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=-\int xe^x\mathrm{d}\frac{1}{1+x}=-\frac{xe^x}{1+\mathrm{x}}+\int\frac{1+x}{1+x}e^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C$

类题 1 $\int\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=-\int x^2e^x\mathrm{d}\frac{1}{2+x}=-\frac{x^2e^x}{x+2}+\int\frac{\mathrm{e}^x(2x+x^2)}{x+2}\mathrm{d}x=-\frac{x^2e^x}{x+2}+(x-1)\mathrm{e}^x+C$

类题 2 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}(e^x+1)=-\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{e^x+1}=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1}{e^x+1}\mathrm{d}x=-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{e^x+1}+\mathrm{C}$

例题 2 $\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{x}{\cos x}\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\cos x}\frac{1}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)$

$=-\int\frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)=-\frac{x}{(x\sin x+\cos x)\cos x}+\tan x+C$

例题 3 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$

解： 令 $x=\frac{1}{t}$

原式 $=4\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}t^4}{(t^2+2)^2}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}te^{-\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}\frac{t^2+2}{(t^2+2)^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$

套路七 利用分部积分，实现“积分抵消”

例题 1 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式$=-\int xe^{x}\mathrm{d}\frac{1}{1+x}=-\frac{xe^{x}}{1+x}+\int\frac{1+x}{1+x}e^{x}\mathrm{d}x=\frac{e^{x}}{1+x}+\mathrm{C}$

类题 1 $\int\frac{(1+\sin x)\mathrm{e}^{x}}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

解： 原式$=\int(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x})e^{x}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{1+\cos x}e^{x}+C$

类题 2 $\int\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1-x}{1+x^{2}}\right)^{2}\mathrm{d}x$

解： 原式$=\int e^{x}\frac{x^{2}-2x+1}{(x^{2}+1)^{2}}=\int e^{x}\left[\frac{1}{x^{2}+1}-\frac{2x}{(x^{2}+1)^{2}}\right]\mathrm{d}x=\frac{e^{x}}{x^{2}+1}+C$

类题 3 $\int\frac{x^{2}\mathrm{e}^{x}}{(x+2)^{2}}\mathrm{d}x$

解： 原式$=-\int x^{2}e^{x}\mathrm{d}\frac{1}{2+x}=-\frac{x^{2}e^{x}}{x+2}+\int\frac{e^{x}(2x+x^{2})}{x+2}\mathrm{d}x=-\frac{x^{2}e^{x}}{x+2}+(x-1)e^{x}+\mathrm{C}$

例题 2 $\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin 2x}{\sin^{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$

解： 令$\sin x=t$

原式$=8\int\frac{\sin x\cos xe^{-\sin x}}{(1-\sin x)^{2}}\mathrm{d}x=8\int\frac{te^{-t}}{(t-1)^{2}}\mathrm{d}t=-8\int te^{-t}\mathrm{d}\frac{1}{t-1}=-8\frac{te^{-t}}{t-1}+8e^{-t}+C$

$=-8\frac{\sin xe^{-\sin x}}{\sin x-1}+8e^{-\sin x}+C$

例题 3 $\int\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$

解： 原式$=\int e^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=2\int e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}\sqrt{\sin x}-\int e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+C$

类题 1 $\int\mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^{3}x-\sin x}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x$

解： 原式$=\int x\,\mathrm{d}e^{\sin x}-\int e^{\sin x}\mathrm{d}\frac{1}{\cos x}=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}\mathrm{d}x-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+\int\frac{\cos x}{\cos x}e^{\sin x}\mathrm{d}x=xe^{\sin x}-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+C$

类题 2 $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

解： 原式$=\int e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=xe^{x+\frac{1}{x}}-\int xe^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\mathrm{d}x+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$

例题 4 $\int\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x$

解： 原式$=x\ln\ln x-\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x=x\ln\ln x+C$

例题 5 已知 $f''(x)$ 连续，$f'(x)\neq 0$，求 $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{-f''f^2+ff'^2}{f'^3}\mathrm{d}x=\int\frac{f}{f'}\mathrm{d}\frac{f}{f'}=\frac{1}{2}\left(\frac{f}{f'}\right)^2+C$

例题 6 $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{x-\ln x+1-x}{(x-\ln x)^2}=\int\frac{1}{x-\ln x}\mathrm{d}x+\int\frac{1-x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{x-\ln x}+C$

套路八 对复杂因子求导，期待出现奇迹

例题 1 $\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{1}{\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}}\mathrm{d}x(\ln x-1)=\ln\left(x(\ln x-1)+\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}\right)+C$

例题 2 $\int\frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{1}{e^x x(1+xe^x)}\mathrm{d}xe^x=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$

类题 $\int\frac{1+x\cos x}{x(1+x\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{e^{\sin x}(xcosx+1)}{xe^{\sin x}(1+xe^{\sin x})}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{xe^{\sin x}}{1+xe^{\sin x}}\right|+C$

例题 3 $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{x-\ln x+1-x}{(x-\ln x)^2}=\int\frac{1}{x-\ln x}\mathrm{d}x+\int\frac{1-x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{x-\ln x}+C$

类题 1 $\int\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{(x-\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{e^x(x-1)}{x^2\left(1-\frac{e^x}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\frac{e^x}{x}}+C=\frac{x}{x-e^x}+C$

类题 2 $\int\frac{x+\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-x\cdot\sin x)^2}\mathrm{d}x$

解： 原式 $=\int\frac{x+\sin x\cos x}{(1-x\tan x)^2\cos x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x\tan x-1)^2}\mathrm{d}x\tan x=\frac{1}{1-x\tan x}+C$