NO.4-2 不定积分解题方法（下）

——换元法、分部积分、综合题

套路三 换元法的基本套路

换元法最重要的作用就是“打开局面”。在做积分题时，只要我们选择恰当的换元，就可以让一些看似很复杂的积分变得非常的简洁。尤其是在处理带有根式的积分时，常常会使用换元法。

(1) 整体换元

一般来说，只要见到被积函数中出现了“$\sqrt{\text{一次函数}}$、$\sqrt{\dfrac{\text{一次函数}}{\text{一次函数}}}$、$\sqrt{\mathrm{e}^{ax}+b}$、$\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{ax}+b}{\mathrm{e}^{ax}-b}}$”，可以直接将整个根号令成$t$，达到消去根号的作用。

当然，值得指出的是，这个方法虽然肯定可行，但并不一定是最简单的方法。我们拿到一个题目以后，也要学会具体问题具体分析，寻找最适合那个题目的解法。

例题 1 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$

注：换元以后不要把$\mathrm{d}x$解出来，而应该直接分部积分。因为如果把$\mathrm{d}x$具体计算出来的话，反而会升高分母的阶，导致整个积分的次数特别高。这个思想我们在后面的**一道真题**中也会用到，请大家先留个心眼。

类题 1 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$

类题 2 请计算$\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\mathrm{d}x$ 两个积分

注：换元法固然可行，但请思考，本题有没有简便方法？（提示：分子有理化，然后裂开，折成 2 个积分）

类题 3 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x$

类题 4 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$

注：本题如果是第一次做，想不到很正常。(本题是同济版高等书教材的课后习题)

例题 2 $\int \frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

注：为了同时消去$\sqrt[3]{x}$和$\sqrt{x}$的根号，很明显需要令$x=t^6$。这说明我们在换元的时候，不要拘泥于具体的形式，而应该具体问题具体分析。总之记住一点——换元的目的是简化被积函数，是为了打开局面！下面是一个类似的题目。

类题 $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}}\mathrm{d}x$ (提示：令$\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}=t$，然后转化为有理函数的积分)

(2) 三角换元

如果在被积函数中出现了“$\sqrt{\text{二次函数}}$”，则一般采用三角换元，具体而言又分为以下几种情况：

1) 若根号里面没有一次项，只有平方项和常数项：

① 形如“$\sqrt{a^2-x^2}$”，则令$x=a\sin t$；

② 形如“$\sqrt{a^2+x^2}$”，则令$x=a\tan t$；

③ 形如“$\sqrt{x^2-a^2}$”，则令$x=a\sec t$；

(**注**：有时候不一定非要出现根号才用三角换元，如：$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$，也可以利用三角换元+二倍角处理)

2) 若根号里面含有一次项，则需先对根号里面的二次函数配方，消去一次项后，便转化为了上面的问题；

下面的这几道例题，**我故意选得比较简单**，自己在草稿本上演算即可。因为我们这份讲义的重头戏在后面，所以前面这些基础的内容只进行简要的回顾即可。

例题 3 $\int\frac{1}{x^4}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

提示：令$x=2\sin t$，即可转化为三角有理函数积分。

例题 4 $\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

提示：令$x=\tan t$

例题 5 $\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx$

提示：先配方，变形为$\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\mathrm{d}x$，再令$x-2=2\sin t$

例题 6 $\int x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

提示：先配方，变形为$\int x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$，再令$x-1=\sin t$

例题 7 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

总结：令$x=\sec t$当然可以做，但其实本题可以归为一种模型——一切可化为$\int\frac{1}{(x+d)\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$和$\int\frac{1}{(x+d)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$的不定积分，都可以先用倒代换$x+d=\frac{1}{t}$，将被积函数大大简化后再积分。

现在，我们以两个最典型的例子作为演示，如下：

类题 1 $\int\frac{1}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x^2+2x+1}}\mathrm{d}x$

至此为止，我们的换元法就讲到这里。

套路四 分部积分法的基本套路

见到不同种类函数相乘，一般要用分部积分公式，$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$。分部积分的使用原则如下：

(1) 口诀：按照“**反对幂指三**”的顺序，谁排在后面，就把谁凑到微分符号d后面去，然后分部积分；

(2) 思想：我们之所以有上述口诀，其本质是因为——“对/反”这两类函数“很怕求导”，这俩一旦求导，就不再是这两类函数了，也就是说，求导会将它们“瓦解”。既然它们怕求导，那我们就要想办法对它们求导，那么怎么才能对它们求导呢?那当然是把除了“对/反”这两类函数以外的其它函数，凑到微分符号d后面去，然后分部积分，因为分部积分以后，会交换u和v的位置，而du就相当于是对u在求导了；同理，当指数函数和幂函数相乘，为什么要把指数函数凑到d后面去?因为幂函数怕求导，指数函数完全不怕。

总之——谁怕求导，我们就要想办法对谁求导，所以就要将其余部分凑到d后面去！

例题 1 $\int x\cdot\arctan x\ \mathrm{d}x$

注：在分部积分时，要善于在d后面增减一个恰当的常数，使得分部积分以后的式子更加简洁。

类题 $\int x\cdot\ln(1+x^2)\cdot\arctan x\ \mathrm{d}x$

例题 2 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$，

注：当被积函数为指数函数和三角函数相乘时，我们需要连续两次分部积分，出现“积分重现”以后，问题才得以解决，并且需要注意——这两次分部积分，每一次凑到d后面的函数，必须是同一种类的函数，否则会原路返回。

类题 $\int x \cdot e^{x} \cdot \sin x \ dx$

例题 3 $\int \ln^{2}\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right) \ dx$

套路五 换元法+分部积分

换元以后，紧接着一步分部积分，是考试中比较常见的出题风格，大家一定要对这种题目特别熟练！而且大家一定要记住，当我们预判出某一个题既要换元，又要分部积分的时候，**我个人的建议是**先用换元法，因为**换元法是用来打开局面的**，换元以后，会让你的整个被积表达式看起来更加的“清爽”，有利于后续的操作。下面，请看几道针对性的例题。

例题 1 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^{x}-1} \, dx$

类题 1 请计算$\int \frac{x \cdot e^{\arctan x}}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}} dx$ 和$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}} dx$

类题 2 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

类题 3 请计算$\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$和$\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$

例题 2 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x$

特别注意：本题换元以后不需要解出$\mathrm{d}x$，即——在换元以后，宜直接进行分部积分，以消去对数符号。若按照平时的做题习惯，解出$x=\frac{1}{t^2-1}$后，将$\mathrm{d}x$具体计算出来，再代入被积表达式，那么接下来的计算，就反而更加繁琐了。类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int \arctan\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

套路六 利用分部积分，对分母进行降阶

如果分母的次数太高，我们除了可以利用倒代换进行降阶以外，还可以利用分部积分进行降阶。在具体操作时，最核心的步骤就是“想办法将分母凑到d后面，然后分部积分”。

比如我们在第一次课讲过的 $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$，就是利用这个了这个思想。下面请看一些类似的典型例题。

例题 1 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$

以上三个题目，将分母凑到d后面去是非常容易的。下面，我们再来看一个难一点的例题，它需要用到“强制凑微分”的技巧，但是其核心思想仍然是“利用分部积分，对分母进行降阶”。

例题 2 $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$

例题 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$

套路七 利用分部积分，实现“积分抵消”

有些题目，需要把一个积分拆成两个积分，其中一个积分I_1暂时不动，另一个积分I_2使用分部积分，而分部积分后得到的新积分，刚好和I_1相互抵消。这种题，被积函数中“一般”都含有指数函数e^x（并且一定含有）。

例题 1 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

注： 本题的题源其实非常简单，即$\int \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x$。对于这个积分，当然可以拆开以后，利用“分部积分+积分抵消”的思想来做，但是如果还记得基本公式$[\mathrm{e}^x f(x)]'=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]$，那么这类题我将绝杀。

类题 1 $\int \frac{(1+\sin x)\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

类题 3 $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

注：前面 4 个题目，被积函数中全都含有 e^x，不禁让人联想——难道“分部积分+积分抵消”的思想，只能用在被积函数出现 e^x 的情形吗？ 其实也不尽然，有的题目，被积函数中出现的是 $e^{f(x)}$，也可以尝试这个方法。请看下面的几个例题。

例题 2 $\int \frac{e^{-\sin x} \cdot \sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} dx$

例题 3 $\int e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$

类题 1 $\int e^{\sin x} \frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x} dx$

注：此题表明，有时候需要对两个积分同时使用分部积分，使得分部积分以后的两个新的积分相互抵消。

类题 2 $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

注：以上几个题，要么含有e^x，要么含有$e^{f(x)}$，但事实上，“分部积分+积分抵消”思想的应用范围远不止如此。很多题目没有出现指数类的函数，但也能用这个思想，请看下面几道题目。

例题 3 $\int\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)dx$

例题 4 已知$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$，求$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]dx$

例题 5 $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$

套路八 对复杂因子求导，期待出现奇迹

有时候，当被积函数中的某一部分，出现了一个比较复杂的“整体”时(这个整体一般来说是一个复合函数或者两个函数的乘积)，那么我们可以尝试对这个整体求求导，看一下它的导函数有什么特点(比如这个整体求导以后的函数，会不会刚好是被积函数的分子呢?)，这便于我们后续的凑微分等操作。

例题 1 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}}\mathrm{d}x$

例题 2 $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$

类题 $\displaystyle\int\frac{1+x\cos x}{x(1+x\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x$

注 1：其实通过上面的例题 2 和类题，我们甚至可以自己总结出一个**出题模板**，如下——

$$\int\frac{1+xf'(x)}{x(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int\frac{[1+xf'(x)]\mathrm{e}^{f(x)}}{x\mathrm{e}^{f(x)}(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int\frac{[x\mathrm{e}^{f(x)}]'}{x\mathrm{e}^{f(x)}(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x\mathrm{e}^{f(x)}}{1+x\mathrm{e}^{f(x)}}\right|+C$$

如果取定 $f(x)=\arctan x$，代入出题模板，稍作变形，即可原创一道题目 $\displaystyle\int\frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(x+x^2\mathrm{e}^{\arctan x})}\mathrm{d}x$，

注 2：下面的题目，难倒了很多的学生，很多人即使看了答案也不知道为何要那么做。现在，请将下面的题目，和上面的两个题做对比，猜测每个题的第一步应该如何操作，就可以将下面这些难题转化为上面的题型（或者类似的题型）。

例题 3 $\displaystyle\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

注：其实，如果稍微敏感一点的话，我们看到 $1-\ln x$ 的时候，就应该想到 $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'$ 了，就如同看到 $1+\ln x$ 就可以联想 $(x\ln x)'$ 一样。

类题 1 $\int \frac{\mathrm{e}^{x}(x-1)}{(x-\mathrm{e}^{x})^{2}}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{x+\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-x\cdot\sin x)^{2}}\mathrm{d}x$