反常积分的计算

一、积分区间内部如果存在瑕点，则需要拆区间

若瑕点在积分区间内部，则需先从瑕点处拆开，将原积分拆成两个积分，分别计算再相加即可.

例题 1 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} \mathrm{d}x$

解： $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$

$=\arcsin \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1^-}+\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}\right)\Bigg|_{1^+}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\ln \frac{1+\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{9-6}\right)=\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

二、将反常积分拆成两个积分计算时，需要考虑每个积分的敛散性

例题 2 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x$

解： $I=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} \frac{x}{x^2(x^2+1)} dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Bigg|_{1}^{b}$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}-\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)\right]=\frac{\ln 2}{2}$

三、反常积分的分部积分，也需要考虑每一项的敛散性

例题 3 $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \mathrm{d}x$

解法一： 先算不定积分：$I_0=\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}+1}-\int\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}dx=\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}+1}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}dx=\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}+1}-\ln(1+\mathrm{e}^x)$

则，$I=\left[\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}+1}-\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]\Bigg|_{0}^{+\infty}=\ln 2+\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}+1}-\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\ln 2$

解法二： $I=\int_{0}^{+\infty} xd\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}-1\right)=-\int_{0}^{+\infty} xd\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}=-\int_{0}^{+\infty} xd\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

$=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\Bigg|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}dx=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\left[\ln 1-\ln\frac{1}{2}\right]$

$=\ln 2$

解法三： $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}dx=-\int_{0}^{+\infty} xd\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\Bigg|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}dx=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\ln 2$

四、无穷区间上的区间再现公式

对于有限区间上的积分，实现区间再现的方法是直接使用区间再现公式，也就是令$x+t=a+b$，而对于无穷区间，尤其是$(0,+\infty)$，我们可采用倒代换的方法，令$x=\frac{1}{t}$，便可实现区间再现.

也可以是将$(0,+\infty)$拆成$(0,1)$和$(1,+\infty)$，然后对$(1,+\infty)$倒代换，从而将$(1,+\infty)$变回$(0,1)$.

也可以三角换元，令$x=\tan t$，这样就将$x\in(0,+\infty)$变成了$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，然后再用区间再现即可.

例题 4 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$，其中$\alpha$是参数.

解法一： 令$x=\frac{1}{t}\Rightarrow I=\int_{+\infty}^0\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(t^2+1)(t^\alpha+1)}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

解法二： 令$x=\tan t\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sec^2t(1+\tan^\alpha t)}\sec^2tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\cos^\alpha t+\sin^\alpha t}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{4}$$

例题 5 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解法一： $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_{+\infty}^0\frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{-\ln t}{t^2+1}dt=-I\Rightarrow I=0$

解法二： 令$x=\tan t, I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\tan t}{\sec^2t}\cdot\sec^2tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cot tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan t\cdot\cot tdt=0$

类题 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$

解法一： $I=\frac{1}{a^2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{x}{a}\cdot a}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\frac{1}{a}\cdot\left[\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\frac{x}{a}\right]+\frac{1}{a}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\ln a}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\frac{x}{a}$

$$=\frac{1}{a}\times 0+\frac{\ln a}{a}\cdot\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty}=0+\frac{\ln a}{a}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}$$

解法二： 令$x=a\tan t\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln a\tan t}{a^2\sec^2t}\cdot a\sec^2tdt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln a+\ln\tan t}{a}dt=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}+\frac{1}{a}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan tdt=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}$$

解法三： 令 $x=\frac{a}{t}\Rightarrow I=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln\frac{a}{t}}{a^2+\frac{a^2}{t^2}}\left(-\frac{a}{t^2}\right)dt=\frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln a-\ln t}{t^2+1}dt$

$=\frac{\ln a}{a}\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}$

例题 6 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$

解： 令 $x=\frac{1}{t},I=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{-\ln t}{t^2+t-1}dt=-I\Rightarrow I=0$

类题 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1-x+x^2)}{(1+x^2)\cdot\ln x}\mathrm{d}x$

解： 令 $x=\frac{1}{t}\Rightarrow I=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)(-\ln t)}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln\frac{t^2-t+1}{t^2}}{(t^2+1)\ln t}dt$

$=-\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)-2\ln x}{(x^2+1)\ln x}dx=-I+2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\Rightarrow I=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$