反常积分的敛散性

一、基本定义与概念

（一）无穷区间上的反常积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，且在任何有限的区间 $[a,b]$ 上都可积. 如果 $b\to+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 极限存在，则称该极限值为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分的值，记做 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

此时也称上述反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 若上述极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

同理，对于其他情况的反常积分，可做如下定义：

$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

其中，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛.

注：对于 $(-\infty,+\infty)$ 的反常积分，不能盲目套用奇偶性的结论，也就是说——

即使 $f(x)$ 是奇函数，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也不一定等于零；

即使 $f(x)$ 是偶函数，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也不一定等于 $2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

上述结论要想成立，前提是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 对于收敛的反常积分，是可以套用奇偶性的结论的.

为什么发散的反常积分不能用奇偶性呢？难道 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 不能利用奇偶性，直接等于 0 吗？

那是因为，对于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 而言，上限趋向于 $+\infty$ 的速度和下限趋向于 $-\infty$ 的速度不一定相同.

从定义可知，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，下限的 $-\infty$ 是因为 $a\to-\infty$，上限的 $+\infty$ 是因为 $b\to+\infty$，但 a 和 b 毕竟是两个不同的变量，所以它们趋向于无穷的速度不一定相同，所以即使 $f(x)=x$ 是奇函数，$\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 对应的无穷大的正面积，与 $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}x$ 对应的无穷大的负面积，也并不是同一个“无穷大”，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 也不能“正负抵消”，所以

$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ 的结果并不是 0，而是发散，或者是不存在.

从这个角度也能看出，为什么 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛.

记住，若 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都发散，二者绝对不可能抵消，从而使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛！

但是这并不代表总结的“发散+发散=不确定”是错的.

因为对于反常积分而言，“发散+发散=不确定”值得是“拆被积函数”，而不是“拆积分区间”.

比如，若 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都发散，那么 $\int_{0}^{+\infty} [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 的敛散性不确定，需要具体问题具体分析，但若 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 里只要有一个发散，那么 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 一定发散！

当然，如果收敛，则可以用奇偶性，比如——

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 就是对的，因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ 收敛；

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$ 就是错的，因为 $\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{+\infty} = +\infty$ 就已经发散了.

认为反常积分可以直接套用奇偶性结论的人，可能背错了定义，他们以为上下限趋向速度相同，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+a} f(x)\mathrm{d}x$，但其实 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

（二）无界函数的反常积分

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，取 $\varepsilon>0$（ε 是充分小的正数），则 $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 是定积分.

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称该极限为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分的值，并称为“瑕积分”，且 $x=a$ 称为“瑕点”，并记 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

此时，称瑕积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当然，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

同理，对于其他情况的瑕积分，可做如下定义：

若 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，则 $x=b$ 是瑕点，并定义 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$.

若 $c\in(a,b)$，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，则 $x=c$ 是瑕点，并定义 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

对于瑕点 c 藏在区间内部的情况，$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛.

注： 对于瑕点藏在内部的瑕积分，也不能盲目套用奇偶性的结论，理由与上面相同！

比如，即使$f(x)=\frac{1}{x}$是奇函数，积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$也并不是 0，而是发散.

因为$\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_{0^+}^{1}=0-(-\infty)=+\infty$，故$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$整体也发散.

（三）绝对收敛与条件收敛

若$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则称$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛；

若$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散，但$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则称$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$条件收敛.

显然，绝对收敛是一个比收敛更强的概念.

二、比较判别法及其极限形式

（一）无穷区间上的反常积分的比较判别法

1. 比较判别法

设函数$f(x),g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$恒成立，则——

(1) 若$\int_{a}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛；（大的收敛，小的也收敛）

(2) 若$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_{a}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$也发散.（小的发散，大的也发散）

示例 若$\int_{1}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$收敛，证明$\int_{1}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$绝对收敛.

解：由均值不等式，$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]$，而$\int_{1}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$和$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty}=1$都收敛，

所以$\int_{1}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$绝对收敛.

但该方法最大的劣势，是需要$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$恒成立，这是一个非常苛刻的条件.

就像单调有界准则一样，我们不必非得要求$\{a_n\}$从第 1 项起就单调，只要从某一项开始，$\{a_n\}$是单调的，就够了，毕竟前面的有限项不会影响敛散性.

反常积分的敛散性也同理. 对于$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_{a}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$，即使在前面的有限长度的区间内，$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$并不成立也无所谓. 只要当$x$充分大以后，有$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$成立，则也能使用比较判别法，并不影响我们对敛散性的判断.

既然前面有限的区间不会改变敛散性，那么我们干脆考察$f(x)$在$x\to+\infty$时的状态，这就引出了下面的“比较判别法的极限形式”.

2. 比较判别法的极限形式

设$f(x)$和$g(x)$在$[a,+\infty)$连续、非负，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，则——

(1) 当$k=0$时，若$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$必收敛（大的收敛，小的必收敛）;

(2) 当$k=+\infty$时，若$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$必发散（小的发散，大的必发散）;

(3) 当k为非零常数，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$的敛散性相同——该结论说明，若$x\to+\infty$时$f(x)$和$g(x)$是同阶无穷小，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$同敛散.

注：比较判别法的极限形式是一个**超级好用**的结论，它说明对于$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$（其中$f(x)\geq0$）而言，其敛散性主要取决于$x\to+\infty$时，$f(x)$作为无穷小的“阶”，这让很多反常积分的敛散性一看便知，还没做就做完了！比如——我们知道$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，所以可以立刻看出下列反常积分收敛：

$$\int_1^{\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x、\int_2^{+\infty}\tan\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x、\int_3^{+\infty}\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x、\int_4^{+\infty}\left(1-\cos\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x，\int_5^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^6+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x.$$

（二）无界函数的反常积分的比较判别法

大家可以与“无穷区间的反常积分的比较判别法”对比着学习.

1. 比较判别法

设$f(x),g(x)$在$(a,b]$连续，$x=a$是它们的瑕点，且$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则——

(1) 如果$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛；（大的收敛，小的也收敛）

(2) 如果$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散，也$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$也发散.（小的发散，大的也发散）

2. 比较判别法的极限形式

设$f(x),g(x)$在$(a,b]$连续、非负，$x=a$是它们的瑕点，且$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，则——

(1) 当$k=0$时，若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必收敛（大的收敛，小的必收敛）；

(2) 当$k=+\infty$时，若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必发散（小的发散，大的必发散）；

(3) 当k为非零常数，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$的敛散性相同——该结论说明，若$x\to a^+$时$f(x)$和$g(x)$是同阶无穷大，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散.

比如，已知$\int_0^1\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_{0^+}^1=+\infty$发散，则由比较判别法的极限形式得，下列积分均发散：

$\int_0^1\dfrac{1}{x\ln(1+x)}\mathrm{d}x$、$\int_0^2\dfrac{1}{x-\ln(1+x)}\mathrm{d}x$、$\int_0^3\dfrac{1}{1-\cos x}\mathrm{d}x$

注：可以看出，为了判断形如$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$或$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$的敛散性，我们要找的对比尺度往往是$p-$积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$或$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$.

那么，什么是$p-$积分呢？

三、*p*-积分与广义 *p*-积分

（一）*p*-积分

形如$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$、$\int_a^b\dfrac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$、$\int_a^b\dfrac{1}{(x-b)^p}\mathrm{d}x$，都称为$p-$积分.

(1) 讨论$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性

解：当$p>1$时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{-p}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0^+}^1=\infty$，发散；

当$p<1$时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{-p}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0^+}^1=\dfrac{1}{1-p}$，收敛；

当$p=1$时，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_{0^+}^1=\infty$，发散.

综上，$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{发散，若}p\geq 1\\ \text{收敛，若}0<p<1\end{cases}$.（对于$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，显然$p$越大越发散）

(2) 讨论$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性

解：当$p>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}x^{-p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{p-1}$；

当$p<1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}x^{-p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\infty$；

当$p=1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{+\infty}=\infty$.

综上，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{发散，}p\leqslant 1\\ \text{收敛，}p>1\end{cases}$.（对于$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，显然$p$越大越收敛）

(3) 讨论$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性

解：由于$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

I_1收敛需要$0<p<1$，I_2收敛需要$p>1$，二者无交集，所以无论p取何值，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$都发散.

(4) 讨论$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$的敛散性

解：本题和第(1)题的$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$没有本质上的区别，它们只是瑕点的位置不同而已.

$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的瑕点是$x=0$，$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$的瑕点是$x=a$，但在敛散性的层面上，结论一致.

$0<p<1$时，积分收敛；$p\geqslant 1$时，积分发散.

(5) 讨论$\int_a^b\frac{1}{(x-b)^p}\mathrm{d}x$的敛散性.

解：分析同上. $0<p<1$时，积分收敛；$p\geqslant 1$时，积分发散.

（二）广义 p-积分

形如$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$、$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$、$\int_{\mathrm{e}^{100}}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot(\ln\ln x)^p}\mathrm{d}x$的积分，都叫广义$p-$积分.

相信大家都能看出来，广义$p-$积分，其实经过凑微分，就可以转化为常规的$p-$积分.

所以二者的结论其实也是对应的.

对于$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$，当$0<p<1$时收敛，当$p\geqslant 1$时发散.

对于$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$、$\int_{\mathrm{e}^{100}}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot(\ln\ln x)^p}\mathrm{d}x$，当$p>1$时收敛，当$p\leqslant 1$时发散.

四、反常积分敛散性判别的步骤

1、找到该积分的所有瑕点（本讲义将无穷远视为“广义瑕点”，统称为瑕点）；

2、判断该积分在每个瑕点处的敛散性. 若每个瑕点处都收敛，则整体也收敛；但凡存在一个发散的瑕点，则整个反常积分就发散.

至于每个瑕点处的敛散性如何判断，具体方法如下——

(1) 看该积分是否本身就是$p-$积分或者广义$p-$积分，如果是，直接套结论；若不是，进入(2)

(2) 找到被积函数在瑕点处的等价量

1) 若被积函数能直接等价为幂函数，则直接利用$p-$积分的结论判断出敛散性（如：$\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$、$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$、$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}x$）

2) 若被积函数无法等价为幂函数，则可能是因为存在对数函数或指数函数. 对数函数速度太慢、阶太低，而指数函数太快、阶太高，所以可以先猜测敛散性，然后用比较判别法的极限形式严格证明（如$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$、$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$、$\int_0^1 (\ln x)^{100}\mathrm{d}x$、$\int_0^1 [\ln(1-x)]^{100}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$）；

3) 若被积函数在瑕点处出现$\sin\infty$或$\cos\infty$的情况，导致被积函数不断变号，则应先判断该积分是否绝对收敛，此时需要对被积函数加绝对值，然后利用$|\sin \bullet| \leqslant 1$或$|\cos \bullet| \leqslant 1$，把被积函数中的三角函数放缩掉，此时会出现两种结果：

① 放缩掉三角函数以后的新积分收敛，则原积分绝对收敛（如$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$）；

② 放缩掉三角函数以后的新积分发散，则暂无法判断原积分的敛散性，此时可以用分部积分，将原积分转化为另一个新的积分，从而转化研究对象.（如$\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$、$\int_1^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x$）

其中，第②种情况，基本不会考，大家不用过于担心.

3、若该积分在所有瑕点处均收敛，则整个积分收敛；只要有一个瑕点处发散，则整个积分发散.

五、经典例题（汇集几乎所有辅导书中的敛散性判断题目）

例题 1 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{4}}}\mathrm{d}x$

解：瑕点只有$x=+\infty$这一个点（再次强调，这里的瑕点包括了广义瑕点∞）.

$x\to+\infty$时，$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{4}}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{x^{4}}}=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$，由于$p=\frac{4}{3}>1$，故$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{4}}}\mathrm{d}x$收敛.

例题 2 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^{2}}}\mathrm{d}x$

解：瑕点只有$x=+\infty$这一个点（广义瑕点）.

$x\to+\infty$时，$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1+x^{2}}}\sim\frac{1}{x\sqrt{x^{2}}}=\frac{1}{x^{2}}$，由于$p=2>1$，故$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^{2}}}\mathrm{d}x$收敛.

例题 3 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m}}{1+x^{n}}\mathrm{d}x\ (m,n>0)$

解：瑕点只有$x=+\infty$这一个点（广义瑕点）.

$x\to+\infty$时，$f(x)=\frac{x^{m}}{1+x^{n}}\sim\frac{x^{m}}{x^{n}}=\frac{1}{x^{n-m}}$，故当$n-m>1$时，收敛；当$n-m\leqslant1$时，发散.

例题 4 $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^{2})(1-k^{2}x^{2})}}\quad(k^{2}<1)$

解：瑕点只有$x=1$这一个点.

$$x\to1\text{时，}f(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^{2})(1-k^{2}x^{2})}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^{2}x^{2})}}\sim\frac{1}{\sqrt{2(1-k^{2})}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x)}},$$

由于$p=\frac{1}{2}<1$，故$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^{2})(1-k^{2}x^{2})}}$收敛.

注：由于敛散性只需要判断“阶”，所以被积函数中的“非零因子”不会影响敛散性，也不必在乎这些非零因子的极限到底是几，我们只需要关注零因子的阶即可.

所以本题解题过程还可简化为$f(x)=O\left(\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right)$，其中大写的$O$表示同阶，小写的$o$才是高阶.

例题 5 $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$

解：瑕点只有 $x=1$ 这一个点.

$x\to 1$ 时，$f(x)=\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{x^4}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$，由于 $p=1$，故积分收敛.

例题 6 $\int_1^2 \frac{1}{(\ln x)^3}\mathrm{d}x$

解：瑕点只有 $x=1$ 这一个点. $x\to 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{(\ln x)^3}\sim\frac{1}{(x-1)^3}$，由于 $p=3>1$，故发散.

例题 7 $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{1-x^3}\mathrm{d}x$

解：瑕点只有 $x=1$ 这一个. $x\to 1$ 时，$f(x)=\frac{\arcsin x}{1-x^3}=\frac{\arcsin x}{(1-x)(1+x+x^2)}=O\left(\frac{1}{1-x}\right)$，故发散.

例题 8 $\int_0^{+\infty} \frac{x\cdot\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$

解：瑕点只有 $x=+\infty$ 这一个（广义瑕点）.

$x\to+\infty$ 时，$f(x)=\frac{x\arctan x}{1+x^3}\sim\frac{x}{x^3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}$，由于 $p=2>1$，故积分收敛.

例题 9 $\int_1^{+\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^a}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{2b}}\mathrm{d}x$ (其中 $a,b>0$)

解：瑕点只有 $x=+\infty$ 这一个（广义瑕点）.

$x\to+\infty$ 时，$f(x)=\frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^a}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{2b}}\sim\frac{\frac{1}{x^a}}{\frac{1}{x^{2b}}}=\frac{x^{2b}}{x^a}=\frac{1}{x^{a-2b}}$，故 $a-2b>1$ 时收敛，$a-2b\leqslant 1$ 发散.

例题 10 设 $a>0$，$f(x)=\begin{cases}\frac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}, & 0<x<1\\ \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right)}{x^b\ln\cos\frac{1}{x}}, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$. 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求 a,b 满足的条件.

解：瑕点为 $x=0$ 和 $x=+\infty$.

$x\to 0^+$时，$f(x)=\dfrac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}\sim\dfrac{x}{x^{\frac{a+1}{2}}}=\dfrac{1}{x^{\frac{a-1}{2}}}$，为了收敛，需要$\dfrac{a-1}{2}<1$，即$a<3$；

$x\to +\infty$时，$f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x^a}\right)}{x^b\ln\cos\frac{1}{x}}\sim\dfrac{\frac{1}{x^a}}{x^b\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}\sim\dfrac{\frac{1}{x^a}}{x^b\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right)}\sim\dfrac{-2}{x^{a+b-2}}$，为了收敛，需要$a+b>3$.

综上，$a<3$且$a+b>3$时，积分收敛.

例题 11 $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ ；$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

解：由于指数函数趋向于 0 的速度很快，所以这两个积分显然都是收敛的，下面给出严格证明.

(1) 令$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，为了证明出$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，我们要找到幂函数$g(x)$，使得$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$本身收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，所以取$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$即可.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}=0$，且$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，则由比较判别法的极限形式可知，$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$也收敛.

(2) 对于$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，方法同上. 其实，由于$x\to+\infty$时，$\mathrm{e}^{-x^2}\ll\mathrm{e}^{-x}$，所以$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$更收敛了.

例题 12 $\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x$ ；$\int_0^1(\ln x)^{2020}\mathrm{d}x$

解：$x\to 0^+$时，$\ln x\to -\infty$，但由于$\ln x$的“速度”很慢，所以大胆猜测这两个积分收敛，证明如下：

(1) 令$f(x)=\ln x$，为证出$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$收敛，我们要找到幂函数$g(x)$，使得$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$本身收敛，

且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，所以取$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$即可.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=0$，且$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛，则由比较判别法的极限形式可知，$\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x$收敛.

(2) 对于$\int_0^1(\ln x)^{2024}\mathrm{d}x$，方法同上. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)^{2024}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}(\ln x)^{2024}=0$，故$\int_0^1(\ln x)^{2024}\mathrm{d}x$收敛.

例题 13 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$；$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}\mathrm{d}x$

解：(1) 只有$x=0$才是瑕点，$x\to 0^+$时，$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}\sim -\ln x$，由上一题可知，该积分收敛.

(2) $x=0$和$x=1$都是瑕点.

$x\to 0^+$时，$\ln x\to -\infty$，故$\left|\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}\right|\ll\frac{1}{\sqrt{x}}$，而$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛，故$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}\mathrm{d}x$在0处收敛

$x\to 1$时，$\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}\sim\frac{1}{x-1}$，$p=1$，故$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}\mathrm{d}x$在$x=1$处发散.

综上，积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}\mathrm{d}x$发散.

例题 14 若反常积分$\int_0^1 x^a(1-x)^b\ln x\,\mathrm{d}x$收敛，则 (　　)

A. $a<-1$且$a+b>-3$　　　B. $b<-2$且$a+b>-3$

C. $a>-1$且$b<-2$　　　D. $a>-1$且$b>-2$

解：瑕点为$x=0$和$x=+\infty$.

(1) $x\to 0^+$时，$f(x)=x^a(1-x)^b\ln x\sim\frac{\ln x}{x^{-a}}$，又$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$在$0\leqslant p<1$时收敛，$p\geqslant 1$时发散，

故要想本题的$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$在$x=0$处收敛，则需要$0\leqslant -a<1$，即$-1<a\leqslant 0$；

注：如果$a>0$，则$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，所以$x=0$根本就不是瑕点，也就谈不上敛散性了.

(2) $x\to 1^-$时，$f(x)=x^a(1-x)^b\ln x\sim\frac{-1}{(1-x)^{-(b+1)}}$，要想收敛，需要$0<-(b+1)<1$，

故$-2<b<-1$.

注：如果这里不限制$0<-(b+1)$，即当$b\geqslant -1$时，$x=1$就不再是瑕点，也就谈不上敛散性了.

故$-1<a\leqslant 0$且$-2<b<-1$时，$\int_0^1 x^a(1-x)^b\ln x\,\mathrm{d}x$收敛.

但是，本题的答案真的是这个吗？

在(1)中，若$a>0$，只代表$x=0$不是瑕点，但此时如果(2)中的$b<-1$，那么$x=1$仍是瑕点，故整个积分仍然是反常积分；

在(2)中，若$b\geqslant -1$，只代表$x=1$不是瑕点，但此时如果(1)中的$a\leqslant 0$，那么$x=0$仍是瑕点，故整个积分仍然是反常积分.

所以本题应该分类讨论，分成 0 是瑕点，1 不是；1 是瑕点，0 不是；0 和 1 都是瑕点.

例题 15 判断$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$的敛散性，并证明：对于任意的$\alpha>0$，当$b>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^b}\mathrm{d}x$均收敛.

分析： $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，而$x\to+\infty$时，虽然$\ln x\to+\infty$，但$\ln x$速度太慢，所以我们有理由相信即使被积函数乘了$\ln x$以后，仍然是收敛的. 那么该怎么证明呢？当然是利用比较判别法的极限形式.

假设$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$g(x)=\frac{1}{x^p}$，我们为了证明$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，当然需要$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$也收敛，所以$p>1$是必须的.

并且，我们希望“通过g收敛证明出f收敛”，所以我们希望$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，即$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^p}}=0$.

也即$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2-p}}=0$，这需要$2-p>0$，故$p<2$.

这样，我们就保证了$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，并且可以通过$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛证明出$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

综上，只需取$p=1.5$，即取$g(x)=\frac{1}{x^{1.5}}$即可.

解： (1) 令$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，取$g(x)=\frac{1}{x^{1.5}}$，显然$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$.

由比较判别法的极限形式可知，原积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(2) 当$b>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^b}\mathrm{d}x$收敛，所以我们有理由猜测$\int_1^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^b}\mathrm{d}x$也收敛.

仿照第(1)问的证明，我们令$f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^b}\mathrm{d}x$，$g(x)=\frac{1}{x^p}$.

为了让$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，需要$p>1$；为了让$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln^\alpha x}{x^b}}{\frac{1}{x^p}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^{b-p}}=0$，

显然只需要$b-p>0$即可，即$p<b$. 综上，只需$1<p<b$.

比如，取$g(x)=\frac{1}{x^{\frac{b+1}{2}}}$，$p=\frac{b+1}{2}>1$，故$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛.

且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln^\alpha x}{x^b}}{\frac{1}{x^{\frac{b+1}{2}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^{\frac{b-1}{2}}}=0$，由比较判别法的极限形式，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^b}\mathrm{d}x$收敛.

例题 16 判断$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}(\ln x)^{q}} \mathrm{d}x$的敛散性(其中$p,q>0$)

解： 当$p=1$，则是“广义p－积分”，敛散性取决于q——$q>1$收敛，$q \leq 1$发散；

当$p>1$，$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}} \mathrm{d}x$已经收敛，那么$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}(\ln x)^{q}} \mathrm{d}x$就更收敛了；

当$0<p<1$，则$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}(\ln x)^{q}} \mathrm{d}x$发散. 此时虽然分母乘了一个无穷大$(\ln x)^{q}$，但仍猜测发散.

令$f(x)=\frac{1}{x^{p}(\ln x)^{q}}$，$g(x)=\frac{1}{x^{k}}$，要让$\int_{2}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x$发散，需要$k \leq 1$；

要让$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^{p}(\ln x)^{q}}}{\frac{1}{x^{k}}}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{k-p}}{(\ln x)^{q}}=+\infty$，只需$k>p$即可.

故只需控制k的范围为$p<k \leq 1$即可.

比如，取$k=\frac{p+1}{2}$，则$g(x)=\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，则由$k=\frac{p+1}{2}<1$，得$\int_{2}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x$发散.

而$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^{p}(\ln x)^{q}}}{\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1-p}{2}}}{(\ln x)^{q}}=+\infty$，则由比较判别法的极限形式，积分发散.

综上，有如下结论——

当$p=1$且$q>1$时收敛；当$p=1$且$q \leq 1$时发散；当$p>1$时，收敛；当$p<1$发散.

例题 17 判断$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x^{a}} \mathrm{d}x$的敛散性(其中$a>0$)

解： 显然，$x=0$是唯一瑕点.

当$a \geq 1$时，$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{a}} \mathrm{d}x$发散，故$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x^{a}} \mathrm{d}x$更发散了（$\ln x$相当于把被积函数放大了）；

当$0<a<1$时，$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{a}} \mathrm{d}x$收敛，所以我们猜测$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x^{a}} \mathrm{d}x$也收敛.

令$f(x)=\frac{\ln x}{x^{a}}$，取$g(x)=\frac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}}$，由于$0<\frac{1+a}{2}<1$，故$\int_{0}^{1} g(x) \mathrm{d}x=\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}} \mathrm{d}x$收敛.

又$\lim\limits_{x \to 0^{+}} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x \to 0^{+}} \frac{\frac{\ln x}{x^{a}}}{\frac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}}}=\lim\limits_{x \to 0^{+}} x^{\frac{1-a}{2}} \ln x=0$，故由比较判别法的极限形式得，$\int_{0}^{1} f(x) \mathrm{d}x$也收敛.

例题 18 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos x} \cdot \sin x} \mathrm{d}x$

解： 显然，$x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 都是瑕点.

(1) $x \to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos x} \cdot \sin x} \sim \frac{1}{x}$，$p=1$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos x} \cdot \sin x} \mathrm{d}x$ 在 $x=0$ 发散，故整体发散.

如果想要再判断 $x=\frac{\pi}{2}$ 也行，不过不影响最终结论了.

(2) $x \to \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos x} \cdot \sin x}=\frac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$，$p=\frac{1}{2}$，故在此处收敛.

例题 19 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^a x \cdot \cos^b x} \mathrm{d}x$ (其中 $a,b>0$)

解： 本题其实是上一题的一般形式，$x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 都是瑕点.

$x \to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{\sin^a x \cdot \cos^b x} \sim \frac{1}{x^a}$；

$x \to \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{\sin^a x \cdot \cos^b x}=\frac{1}{\sin^a x \cdot \sin^b\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^b}$.

要想收敛，必须保证 $a<1$ 且 $b<1$，其余情况都发散.

例题 20 $\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right] \mathrm{d}x$

解： $x=0$ 和 $x=+\infty$ 都是瑕点.

(1) $x \to 0^+$ 时，$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x} \sim \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x \sim (-\ln x)$

即 $x \to 0^+$ 时，被积函数与 $(-\ln x)$ 是等价无穷大，故该积分在 $x=0$ 处收敛；

(2) $x \to +\infty$ 时，$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]-\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$.

$p=2>1$，故收敛.

综上，积分 $\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right] \mathrm{d}x$ 收敛.

例题 21 设 $\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=1$，求 a,b 的值

解： 先通分，$\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{2x^2+bx+a-2x^2-ax}{x(2x+a)}\right]\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\dfrac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x$.

要想收敛，必须有 $a=b$（否则 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$，积分显然发散）.

此时，$I=\int_1^{+\infty}\dfrac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x+a}\right)\mathrm{d}(2x)=\ln\dfrac{2x}{2x+a}\bigg|_1^{+\infty}=0-\ln\dfrac{2}{2+a}=1$.

故 $\dfrac{2}{2+a}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，解得 $a=2(\mathrm{e}-1)$，故 $a=b=2(\mathrm{e}-1)$.

例题 22 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$

解： $x=0$ 和 $x=+\infty$ 都是瑕点.

$x\to0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$p=\dfrac{1}{2}<1$，故积分在此处收敛；

$x\to+\infty$ 时，被积函数有正有负，所以加绝对值，考察绝对收敛性.

$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$，$p=\dfrac{3}{2}>1$，故该积分在此处绝对收敛.

综上，$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛.