2024-2025学年微甲提高1班辅学讲义

#2 期中复习Part I

yuanhongyi2004 2024.10.25

基础回顾

函数极限

1.函数极限定义：$\varepsilon-\delta$语言

定义 2.1.1 设 $f: D \to \mathbb{R}$, D 是 $\mathbb{R}$ 的子集且包含 x_0 的某去心邻域. 如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对于任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \cap D$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

就称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 趋于 A, 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或者 \quad f(x) \to A, x \to 0.$$

此时称 A 是 f 在 x_0 处的极限. 如果不存在满足要求的 A, 就称 f 在 x_0 处的极限不存在.

【注 1】定义 2.1.1 中 我们不要求 f 在 x_0 处有定义. 即使 f 在 x_0 处有定义, 极限 A 也不一定与 $f(x_0)$ 相等.

【注 2】定义 2.1.1 中, "当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \cap D$ 时" 可写为 "在 D 内当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时".

- 单侧极限，无穷处的极限

2.归结原理/海涅定理：建立数列极限与函数极限的关系

定理 2.1.5 (归结原理) 设 $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \mathring{U}(x_0) \subset D$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是: 对于任意满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0, n = 1, 2, 3, \cdots$ 的数列 $\{x_n\}$. 其对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 均有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

3.性质：唯一性，局部有界性，局部保号性，四则运算(类比数列极限性质)

4.两个重要极限

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$或者$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

函数连续性

1.函数在某点连续

定义 2.2.1 设 $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, D$ 包含 x_0 的某个邻域. 如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

就称 f 在 x_0 处连续.

f 在 x_0 处连续也可以用 "$\varepsilon - \delta$" 语言表述如下:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 当 |x - x_0| < \delta 时, 有 |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2.函数在某点的连续性对加减法，乘法封闭，除法要求分母不为0

3.复合函数，反函数的连续性

定理 2.2.7 (复合函数的连续性) 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, $y_0 = f(x_0)$, $z = g(y)$ 在 y_0 处连续, 则复合函数 $z = g(f(x))$ 在 x_0 处连续.

4.间断点的定义

连续要求函数值存在并且等于在该点的左右极限

定义 2.2.12 (1) 如果左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在但 f 在 x_0 处不连续, 就称 x_0 是 f 的**第一类间断点**. 特别地, 如果左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等, 就称 x_0 是 f 的**跳跃间断点**; 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但极限值不等于 $f(x_0)$ 或者 f 在 x_0 处没有定义, 就称 x_0 是 f 的**可去间断点**;

(2) 如果 f 在 x_0 处的左极限和右极限至少有一个不存在, 就称 x_0 是 f 的**第二类间断点**.

5.函数在一个区间上连续，一致连续性

定义 2.2.9 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$. 如果 f 在开区间 (a, b) 内连续, 在 a 处右连续, 在 b 处左连续, 就称 f 在闭区间 $[a, b]$ 上**连续**.

定义 2.2.14 设函数 $f : I \to \mathbb{R}$, 如果 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 就称函数 f 在区间 I 上是**一致连续的**.

从一致连续的定义可以看出, 若 f 在区间 I 上一致连续, 则 f 在区间 I 上一定是连续的, 而反之不然.

- 一致连续的几何意义?

【思考】:

- 连续函数±连续函数 一定是连续函数
- 不连续函数±不连续函数 可能是不连续函数，也可能是连续函数
  $f(x) = sgn(x), g(x) = -sgn(x)$
- 连续函数±不连续函数 一定是不连续函数(反证法)
- 连续×不连续 可能是连续，可能是不连续
  $f(x) = |x|, g(x) = sgn(x)$
- ...

无穷小和无穷大

1.低阶无穷小，同阶无穷小，等价无穷小，高阶无穷小

一个性质：有界量×无穷小 = 无穷小
有限个无穷小相加还是无穷小(无限个不一定)

2.常见的等价无穷小

(1) $\sin x \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \tan x \sim x;$
(2) $\ln(1+x) \sim x;$
(3) $e^x - 1 \sim x;$
(4) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x;$
(5) $\arcsin x \sim x, \arctan x \sim x.$

$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$
这一部分与后面泰勒公式联系很紧密

闭区间上的连续函数

1.有界，存在最值
2.零点存在定理⇒介值定理

导数

1.某点导数的定义：
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$或者$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
2.导函数：
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
3.单侧导数：$f'_+(x_0), f'_-(x_0)$，实际为导数定义变成单侧极限
4.可导性与连续性的关系：**可导必连续，连续不一定可导**
5.常见函数的导数，导数四则运算，复合函数求导：和高中学的一样
6.反函数的导数：$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$
8.隐函数求导，方程两边对x同时求导，注意把y看作x的函数
9.参数方程求导
$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b'(t)}{a'(t)}$
10.极坐标求导

$r = \rho(\theta)$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \Rightarrow$参数方程求导

11.高阶导数 莱布尼兹公式 参数方程求二阶导数

12.微分$dy = f'(x)dx$ 或者$df(x) = f'(x)dx$

微分中值定理

费马引理

设x_0是函数f的极值点，并且f在x_0处可微，则：

$$f'(x_0) = 0$$

罗尔定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$f(a) = f(b)$，则$\exists \xi \in (a,b)$, 使得$f'(\xi) = 0$

证明:
$(i)f \equiv C, \Rightarrow f'(\xi)=0, \forall \xi \in (a,b)$
(ii)不妨$\exists x_0$满足$f(x_0) < f(a) = f(b)$,则$f(x)$存在最小值，$f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，$\exists \xi \in (a,b)$,使得：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{或者}f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

证明：设$k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff$ 证明$f'(\xi)=k$
由上式得：$f(b)-f(a)-k(b-a)=0$
设$F(x)=f(x)-f(a)-k(x-a) \Rightarrow F(b)=F(a)=0$
由罗尔定理：$\exists \xi \in (a,b)$，$F'(\xi)=0 \iff f'(\xi)=k$

柯西中值定理

设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$g'(x)\neq 0$，则$\exists \xi \in (a,b)$,使得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

设$k=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
$\Rightarrow f(b)-f(a)-k(g(b)-g(a))=0$
设$F(x)=f(x)-f(a)-k(g(x)-g(a)) \Rightarrow F(a)=F(b)=0$
$\therefore \exists \xi \in (a,b), F'(\xi)=0 \iff \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

习题选讲

1^{∞}

取对数或者指数恒等变形

7. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=2$, 试求常数 a 的值.

解: 由题可知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=2,$$

故 $a=\dfrac{\ln 2}{2}$.

$e^{x\ln(\frac{x+a}{x-a})}\sim e^{x(\frac{x+a}{x-a}-1)}\to e^{2a}=2$

$1+x+x^2+...+x^{2^{n+1}-1}$等比数列求和

10. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$ 的值.

解: 当 $x=-1$ 时有 $1+x=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)=0.$$

当 $x=1$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{2\times2\times\cdots2}_{n\text{ 个}}=\lim_{n\to\infty}2^n=+\infty.$$

即当 $x=1$ 时, 极限不存在.

此时考虑 $|x|\neq1$ 时, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.\end{aligned}$$

此时只需考察 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}$.

容易知道, $|x|<1$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$; $|x|>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}$ 不存在.

则 $|x|<1$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1-0}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

综上, $x=-1$ 时原极限值为 0; $-1<x<1$ 时原极限值为 $\dfrac{1}{1-x}$; $|x|>1$ 时原极限不存在.

根号常用手法：有理化，看作分数指数幂

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin x)&=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2}\\&=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x^2+1}+x)},\end{aligned}$$

45. 当 $x \to 0^+$ 时, 求下列无穷小量关于 x 的无穷小阶数.

(1) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$;　　(2) $x^2 \sin^{\frac{1}{k}} x$, k 为正整数;

(3) $\ln(1+x)-\ln(1-x)$;　　(4) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$;

(4) 设阶数为 α, 则应有

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^\alpha} \neq 0.$$

又因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\tan x)-(1+\sin x)}{x^\alpha\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^\alpha \cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x(1-\cos x)}{2x^\alpha} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot \frac{x^2}{2}}{2x^\alpha} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+} x^{3-\alpha}.
\end{aligned}$$

上述极限若不为 0, 则只能有 $3-\alpha=0$, 解得 $\alpha=3$.

故无穷小量 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$ 关于 x 的无穷小阶数为 3.

介值定理

60. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 试证:

(1) 若 a_1, a_2 是满足 $a_1+a_2=1$ 的正实数, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$a_1 f(a)+a_2 f(b)=f(\xi);$$

(2) 对任意正实数 k_1, k_2, 至少存在一点 $\eta \in [a,b]$, 使得

$$k_1 f(a)+k_2 f(b)=(k_1+k_2) f(\eta).$$

证明: (1) 由最大值最小值定理, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最值, 设最大值为 M, 最小值为 m.

则此时有 $m \leq f(a) \leq M$, $m \leq f(b) \leq M$ 成立.

由 $a_1, a_2>0$ 从而有 $a_1 m \leq a_1 f(x_1) \leq a_1 M$, $a_2 m \leq a_2 f(x_2) \leq a_2 M$ 成立.

因此

$$m=(a_1+a_2) m \leq a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2) \leq (a_1+a_2) M=M.$$

由介值定理, 至少存在一 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi)=a_1 f(a)+a_2 f(b).$$

(2) 由最大值最小值定理, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最值, 设最大值为 M, 最小值为 m.

则此时有 $m \leq f(a) \leq M$, $m \leq f(b) \leq M$ 成立.

由 $k_1, k_2>0$ 从而有 $k_1 m \leq k_1 f(a) \leq k_1 M$, $k_2 m \leq k_2 f(b) \leq k_2 M$ 成立.

因此

$$(k1+k_2) m \leq k_1 f(a)+k_2 f(b) \leq (k_1+k_2) M.$$

从而转换可得

$$m \leq \frac{k_1 f(a)+k_2 f(b)}{k_1+k_2} \leq M.$$

由介值定理, 至少存在一点$\eta \in [a,b]$, 使得

$$f(\eta)=\frac{k_1 f(a)+k_2 f(b)}{k_1+k_2}, \text{即 } k_1 f(a)+k_2 f(b)=f(\eta)(k_1+k_2).$$

63. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}\left[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)\right].$$

证明: 由最大值最小值定理, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_n]$ 上有最值, 设最大值为 M, 最小值为 m.

则对 $i=1,2,\cdots,n$, 均有 $m\le f(x_i)\le M$ 成立. 因此

$$\begin{aligned}\frac{2}{n(n+1)}(m+2m+\cdots+nm)&\le\frac{2}{n(n+1)}\left[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)\right]\\&\le\frac{2}{n(n+1)}(M+2M+\cdots+nM).\end{aligned}$$

又 $\frac{2}{n(n+1)}(m+2m+\cdots+nm)=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(nm+m)}{2}=m$,

$\frac{2}{n(n+1)}(M+2M+\cdots+nM)=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(nM+M)}{2}=M$,

则有 $m\le\frac{2}{n(n+1)}\left[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)\right]\le M$ 成立.

由介值定理, 在 $[x_1,x_n]$ 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}\left[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)\right].$$

且此时有 $\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$, 即 ξ 必在 (a,b) 内.

导数

基本的求导不再强调，把定义公式往里面套就行

11. 设 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $f(x)=\begin{cases}\varphi(x)\sin\frac{1}{x}, & x\ne0,\\0, & x=0,\end{cases}$ 试求 $f'(0)$.

解: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}\boxed{\sin\frac{1}{x}.}$ 有界量

又因为 $\varphi(0)=0$, 且 $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}=0,}$ 无穷小

而此时 $-\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}\le\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}\sin\frac{1}{x}\le\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}$,

由夹逼定理则有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}\sin\frac{1}{x}=0$. 也即 $f'(0)=0$.

分段函数的导数，有可能要用连续性的条件，常常要分别求出单侧导数

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ax+b, & x>1,\end{cases}$ 试确定 a,b, 使 f 在点 $x=1$ 处连续且可导.

抽象函数导数

13. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 且对于任意的 x 和 h 均有

$$f(x+h)=f(x)f(h), \quad f(0)\neq 0,$$

(1) 证明 $f(0)=1$;

(2) 若 $f'(0)$ 存在, 证明 $f(x)$ 在任一点 x 均可导, 且 $f'(x)=f(x)f'(0)$.

证明: (1) 令 $x=h=0$, 则由题 $f(0+0)=f(0)f(0)$, 即 $f(0)^2=f(0)$,

又 $f(0)\neq 0$, 则有 $f(0)=1$ 成立.

(2) 对任意 x, 由于 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x-0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$,

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)f'(0)$,

从而对任意 x, $f'(x)$ 存在, 且 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)f'(0)$.

类似题:

13. 设函数 $f(x),g(x)$ 定义于 $\mathbb{R}$ 上, 且满足

(1) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$;

(2) $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处可导;

(3) $f(0)=0,g(0)=1,f'(0)=1,g'(0)=0$.

证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f'(x)=g(x)$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(g(\Delta x)-1)+f(\Delta x)g(x)}{\Delta x}$$

$f(x)$满足$f(xy)=f(x)f(y)$，且$f'(1)$存在，求$f'(x)(f\not\equiv C,x\neq 0)$

期中Tips

求极限的，先判断大致类型

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{\cos\ln(1-2x)}\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^3}-1+x^4\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+2x)\cdot\tan^2 x}$.

喜欢考根式

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+6x-1}+x+3)$$

$t=-x\to+\infty$

$$-t(\sqrt{t^2-6t-1}-(t-3))=-t\frac{-10}{\sqrt{t^2-6t-1}+t-3}\to 5$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=0$，求$a,b$

$$a=-1,b=\frac{1}{2}$$

倒代换，$t=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}$$

每年都考一个夹逼定理

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1+\sin 1}+\dfrac{2}{n^2+1+\sin 2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1+\sin n}\right)$.

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac{1}{n}}}\right)$.

换元让无穷小变得更加清楚

$$\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$$

解: (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}&\xlongequal{t=x-a}\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t+a)-\tan a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\tan t+\tan a}{1-\tan a\tan t}-\tan a}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t+\tan a-\tan a(1-\tan a\tan t)}{t(1-\tan a\tan t)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t(1+\tan^2 a)}{t(1-\tan a\tan t)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1+\tan^2 a}{1-\tan a\tan t}\\&=1+\tan^2 a.\end{aligned}$$

类似地：

当$x\to 1$时，$1-\dfrac{m}{1+x+x^2+\ldots+x^{m-1}}$是$(x-1)$的等价无穷小，求$m$

$$1-\frac{m(x-1)}{x^m-1}\sim x-1$$

$1-\dfrac{mt}{(1+t)^m-1}\sim t$，写出定义，并用等价无穷小$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$\dfrac{(1+t)^m-mt-1}{mt^2}\to 1(t\to 0)$二项式展开

$$\frac{m(m-1)}{2m}=1\Rightarrow m=3(m>0)$$

$a_1=3,2a_{n+1}=a_n+\dfrac{6}{a_n+1}(n\geq 1)$

(1)证明a_n收敛。(2)求$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

> 分析：$2A=A+\dfrac{6}{A+1}\Rightarrow A=2(A>0)$

$2(a_{n+1}-2)=\dfrac{(a_n-2)(a_n-1)}{a_n+1}$
$a_1>2\Rightarrow a_n>2,\forall n\in N^+$
$\dfrac{1}{2}\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{2}{a_n+1})<\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<a_{n+1}-2<\dfrac{1}{2}(a_n-2)<\ldots<\dfrac{1}{2^n}(a_1-2)$

单调有界基本功不能忘

$0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，证明$x_n$有限并求出极限

$0<x_{n+1}\leq\dfrac{3}{2}(AM-GM),\forall n$

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{3-x_n}{x_n}}>1$

$f_n(x)=x+x^2+\ldots+x^n-1$

(1)证明$f_n(x)$有唯一正根x_n。(2)证明x_n收敛并求极限

$f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n-1\geq 0$，$f_n(x)$单调递增

我们要研究一些x_n的性质

$f_n(x_n)=0=f_{n+1}(x_n+1)=x_{n+1}^{n+1}+f_n(x_{n+1})>f_n(x_{n+1})$

$\Rightarrow x_n>x_{n+1}>0$

$f_n(x_n)=\dfrac{x_n(x_n^n-1)}{x_n-1}-1=0$
$\Rightarrow\dfrac{1-2A}{A-1}=0$