中值定理大题答案版

套路一

例题 1 设$f(x)$三阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$，证: $\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f'''(\xi)=0$

解： 由 $\lim\limits_{x->0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$ 得$f(0)=1,f'(0)=0$

$\lim\limits_{x->1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$ 得$f(1)=1,f'(1)=0$

由$f(0)=f(1)$,由罗尔定理得$\exists\mu\in(0,1)$,s.t. $f'(\mu)=0$

$\therefore$ 由$f'(\mu)=f'(0)=f'(1)=0$

由两次罗尔定理得，$\exists\xi\in(0,1)$,s.t. $f'''(\xi)=0$

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$三阶可导，$f(0)=f(1)=0$，令$F(x)=x^3f(x)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $F'''(\xi)=0$

解： 由题意$F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理$\exists\alpha\in(0,1)$,st $F'(\alpha)=0$

又$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

有$F'(0)=F'(\alpha)=0$

由罗尔定理得，$\exists\varepsilon\in(0,\alpha)$,$st$ $F''(\varepsilon)=0$

$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$

$F''(0)=F''(\varepsilon)=0$

由罗尔定理得，$\exists\xi\in(0,\varepsilon)$,$st$ $F'''(\xi)=0$

例题 3 请叙述并证明拉格朗日中值定理、柯西中值定理。

拉格朗日中值定理：如果函数满足：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续；

(2)在开区间(a,b)内可导；

那么在开区间(a,b)内至少有一点$\varepsilon(a<\varepsilon<b)$使等式$f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)(b-a)$成立

法一(原函数构造法)

分析：由结论$f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)(b-a)$，其中$\varepsilon\in(a,b)$想到可以构造$h(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

来证明ε的存在性，积分得到$H(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C$,为证明方便，这里我们取$C=0$

证明： 令$H(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$,因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导

所以$H(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导

又$H(a)=H(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

由罗尔定理得$\exists\xi\in(a,b),s.t.\ H'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,得证

法二(做差构造函数法)

分析：方法与法一类似，只是构造函数有所不同，仍然用罗尔定理证明

证明：作函数$F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

显然，$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$

因此由罗尔定理得，$\exists\xi\in(a,b),s.t.\ F'(\xi)=0$,即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

法三(行列式法)

分析：该法的主要思路是构造一个含$f(x)$且满足罗尔定理的函数$F(x)$

关键是满足$F(a)=F(b)$,从行列式的性质，联想到行列式$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$在$x=a$和$x=b$时的值恰好为$0$,

因此可构造函数$F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$

证明：令$F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$,由线代的知识我们知道,

有两行/两列成比例，该行列式的值为0，所以$F(a)=F(b)$,

且$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，由罗尔定理得

$\exists\xi\in(a,b),s.t.\ F'(\xi)=0$,而$F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & f'(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}=f(b)-f(a)-(b-a)f'(x)$

从而$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,得证

柯西中值定理：如果函数$f(x)$及$F(x)$满足

(1)在闭区间$[a,b]$上连续

(2)在开区间(a,b)内可导

(3)对任一$x\in(a,b)$,$F'(x)\neq 0$,那么在(a,b)内至少有一点ξ,

使等式$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$成立

在思考证明思路前，先让我们了解一下这个定理的几何意义

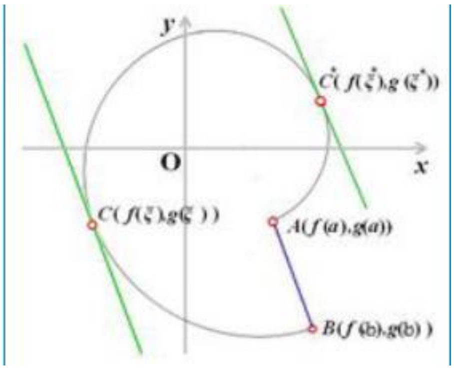
几何意义：

若令 $u=f(x)$，$v=g(x)$,

这个形式可理解为参数方程，而$\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$

则是连接参数曲线两端点弦的斜率，

$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 表示曲线上某点处的斜率，在定理的条件下，结论可理解如下：



用参数方程表示的曲线上至少有一点，在这一点处的切线平行于连接两个端点的弦。

证明过程：

在知道几何意义后，证明就可以对症下药。

这里其实可以借鉴拉格朗日中值定理的证明思路，如果想证明一条直线存在平行线与曲线相切，可以用曲线减去直线，得到的式子若有斜率为 0 的点，则成立。

证明： $F(x)=g(x)-\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}(f(x)-f(a))-g(a)$

$F(a)=F(b)$, 由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)\ s.t. F'(\xi)=0$

即 $\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\dfrac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$

例题 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$

证明： 由题意 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，不妨设 $f'_+(a)$，$f'_-(b)$ 均为正

则有 $\lim\limits_{x->a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, $\lim\limits_{x->b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$

则 $\exists\alpha\in(a,a+\delta), s.t.\ f(\alpha)>0$, $\exists\beta\in(b-\delta,b), s.t.\ f(\beta)<0$

在 (α,β) 中，由零点存在定理知 $\exists\eta\in(\alpha,\beta), s.t.\ f(\eta)=0$

则 $f(a)=f(b)=f(\eta)=0$

由两次罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b), s.t.\ f''(\xi)=0$

同理，当 $f'_+(a)$，$f'_-(b)$ 均为负时，也成立

类题 请叙述并证明费马定理、导数零点定理、导数介值定理(也叫达布定理)

费马定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对于任意的 $x\in U(x_0)$, 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ (或 $f(x)\geqslant f(x_0)$), 那么 $f'(x_0)=0$

证明： 对于 $x\in U(x_0)$, 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$

由极限的保号性，

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x->x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x->x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$

得 $f'(x_0)=0$

注： 导数零点定理:定理:设$f(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'_+(a)\mathrm{f}'_-(b)<0$,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

证明： 不妨设$f'_+(a)<0$,$f'_-(b)>0$,$f(x)$在$[a,b]$上的最小值为m,$m=f(\xi)$,

由$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$及极限的保号性得,在$x=a$的某个右邻域内,

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0(x>a)$,于是$f(x)<f(a)$同理,由$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$

及极限的保号性得,在$x=b$的某个左邻域内,$\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0(x<b)$,于是$f(x)<f(b)$

综上得,$\xi\neq a,b$,因此,$\xi\in(a,b)$,由费马引理得,$f'(\xi)=0$.

(费马引理：若$f(x)$在x_0处可导,在x_0的某邻域内均有$f(x)\leq \mathrm{f}(x_0)$（或$f(x)\geq f(x_0)$),则$f'(x_0)=0$)

导数介值定理:若$f(x)$在$[a,b]$上可微,且$f'(a)\neq f'(b)$,则对于$f'(a)$与$f'(b)$之间的任一数u,必有一点$c\in(a,b)$,使$f'(c)=u$.

证明： 不妨设$f'(a)<u<f'(b)$,作辅助函数$\psi(x)=f(x)-ux$,其中$x\in[a,b]$。

因$f(x)$在$[a,b]$上可微,故$\psi(x)$也在$[a,b]$上可微。因$\psi(x)$在$[a,b]$上连续。

故$\psi(x)$在$[a,b]$上能达到最小值。设$\psi(\xi)$是$\psi(x)$在$[a,b]$上的最小值。

(1)若$\psi\in(a,b)$因$\psi(x)$在$[a,b]$上可微,由费马引理,$\psi'(\xi)=f'(\xi)-u=0$

即$f'(\xi)=u$,又$\xi\in(a,b)$, ξ即为所求的c,此情形得证

(2)若$\xi=a$或b即$\psi(a)$或$\psi(b)$是$\psi(x)$在$[a,b]$上的最小值。即对$x\in[a,b]$,

$\psi(a)\leq\psi(b)$或$\psi(b)\leq\psi(x)$。则$\dfrac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}\geq 0$或$\dfrac{\psi(x)-\psi(b)}{x-b}\leq 0$

故$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}=\psi'(\mathrm{a})\geq 0$或$\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{\psi(x)-\psi(b)}{x-b}=\psi'(\mathrm{b})\leq 0$

则$\psi'(a)=f'(a)-u\geq 0$或$\psi'(b)=f'(b)-u\leq 0$即$f'(a)\geq u$或$f'(b)\leq u$

这都与$f'(a)<u<f'(b)$相矛盾。得证

例题 5 设$a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$ (a_i均为常数). 证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$在$(0,1)$至少有一个解.

证明： 令$F(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{i+1}x^{i+1}$

由题意，$F(0)=F(1)$,且$F(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导

由罗尔定理得，$\exists\xi\in(0,1),s.t.\ F'(\xi)=0$

则原式得证

例题 6 假设某n次多项式多项式$P_n(x)$的一切根均为实根，证明:$P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$也仅有实根

证明： 设$P_n(x)=A\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{r_i}$,其中$\sum\limits_{i=1}^{k}r_i=n$

由罗尔定理，在相邻两相异实根之间，必存在$P'_n(x)$的一个根，所以$P'_n(x)$共有$k-1$个这样的实根

另一方面，由x_i必是$P'_n(x)$的r_i-1重根，所以$P'_n(x)$实根的个数为$k-1+\sum\limits_{i=1}^{k}(r_i-1)=n-1$

又$P'_n(x)$为$n-1$次多项式，至多有$n-1$个实根，所以仅有实根,

同理可知$P_n''(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根

套路二

例题 1 请说明套路二的原理是什么，即$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$到底是如何构造出来的（此处务必看 B 站视频）

解： 本质上是解微分方程

即$f'(x)+g(x)f(x)=0$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int g(x)dx$$

有$f(x)e^{\int g(x)dx}=C$

例题 2 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$f(a)=f(b)=0$，证明以下结论:

(1)$\exists\xi\in(a,b)$,使$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$;(补充$0\not\subseteq(a,b)$)

(2)$\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

证明：(1)由示例1，我们构造$g(x)=f(x)x^2$

$g(a)=g(b)=0$

由罗尔定理得$\exists\xi\in(a,b)$,s.t. $g'(\xi)=\xi(2f(\xi)+\xi f'(\xi))=0$

$\because\xi\neq0$，$\therefore 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，得证

(2)由示例1，我们构造$\mathrm{g}(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x}$

显然$\mathrm{g(a)=g(b)}=0$，由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$

s.t. $\mathrm{g}'(\xi)=0$,即$f'(\xi)+f^2(\xi)=0$,得证

类题 设$f(x)$可导，$f(0)=1$，$f(1)=0.5$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明： 通过同时除以$f^2(x)$,我们可以解出微分方程从而构造

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x$$

显然通过计算得到$g(0)=g(1)=1$

但是我们发现$f(x)$处在分母上，可能不连续，所以我们作以下讨论

1^0 $f(x)$在$[0,1]$无零点，则$g(x)$满足罗尔定理条件，$\exists\xi\in(0,1)$

$s.t.\ g'(\xi)=0$,得证

2^0 $f(x)$在$[0,1]$恰好有1零点,记为x_0，则x_0必为最小值点，则必有$f'(x_0)=0$

则显然$f^2(x_0)+f'(x_0)=0$,得证

3^0 $f(x)$在$[0,1]$有至少2零点，则由示例2方法易证

综上得证

例题 3 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$a>0$，$f(a)=0$，证:$\exists\xi\in(a,b)$，$s.t.\ f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

证明： 由$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{a}{b-x}$

解得$f(x)(b-x)^{a}=C$，故构造$h(x)=f(x)(b-x)^{a}$，$h(a)=h(b)=0$

由罗尔定理得，$\exists\xi\in(a,b)$，$s.t.\ h'(\xi)=0$，得证

例题 4 设$f(x)$在$[0,3]$上二阶可导,$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$,证:$\exists\xi\in(a,b),s.t.\ f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

证明： $\exists\xi\in(a,b),s.t.\ f''(\xi)-2f'(\xi)=0$，$f''(x)=2f'(x)$

积分得$f'(x)=2f(x)+C_1$，为证明方便取$C_1=0$，再次积分得

$f(x)e^{-2x}=C$，构造$h(x)=f(x)e^{-2x}$，

由积分中值定理得$\int_0^2 f(x)dx=2f(\mu)\ (\mu\in(0,2))$

由介质定理得$\exists\zeta\in(2,3),s.t.\ f(2)+f(3)=2f(\zeta)$

$\therefore$ 由题目条件可得，$f(0)=f(\mu)=f(\zeta)$，即$g(0)=g(\mu)=g(\zeta)$

由两次罗尔定理得，$\exists\xi\in(0,1),s.t.\ g''(\xi)=0$，即$f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

例题 5 $f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证:$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f''(\xi)=f(\xi)$

证明： 与示例4类似我们可以通过解微分方程构造$h(x)=f(x)e^{-x}$

由题意$f'_+(a)f'_-(b)>0$，不妨设$f'_+(a)$，$f'_-(b)$均为正

则有 $\lim\limits_{x->a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, $\lim\limits_{x->b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$

则$\exists\alpha\in(a,a+\delta),s.t.\ f(\alpha)>0,\exists\beta\in(b-\delta,b),s.t.\ f(\beta)<0$

在(α,β)中，由零点存在定理知$\exists\eta\in(\alpha,\beta),s.t.\ f(\eta)=0$

则$h(a)=h(\eta)=h(b)=0$

由两次罗尔定理得$\exists\xi\in(a,b),s.t.\ h''(\xi)=0$

得证

类题 1 $f(x)$在$(0,+\infty)$二阶可导，证：对$\forall a>0$，$\exists c\in(2a,4a)$，使得$f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

证明： $f(4a)=f(3a)+af'(3a)+\dfrac{a^2}{2}f''(\xi_1)$

$f(2a)=f(3a)-af'(3a)+\dfrac{a^2}{2}f''(\xi_2)$

$f(4a)+f(2a)-2f(3a)=\dfrac{a^2}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$

由介质定理$\exists c\in(2a,4a),s.t.\ f''(c)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

$\therefore a^2f''(c)=f(4a)+f(2a)-2f(3a)$

类题 2 设$f(x)$在$[0,2\pi]$二阶可导，$f''(x)\neq f(x)$，证明：$\exists\xi\in(0,2\pi)$，使得$\tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

证明： 首先我们可以将所证等式变形为

$f(x)-f''(x)=2\cot x f'(x)$，进一步$f''(x)+\cot x f'(x)=-(\cot x f'(x)-f(x))$

等式两边同乘$\sin x$后积分易得$f'(x)\sin x+f(x)\cos x=C$

进而想到构造$h(x)=f(x)\sin x$，则$h(0)=h(\pi)=h(2\pi)$

应用两次罗尔定理后得 $\exists\xi\in(0,2\pi)$，$s.t.\ h''(\xi)=0$，

则 $f(\xi)-f''(\xi)=2\cot\xi f'(\xi)$，即 $\tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

套路三

例题 1 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明: $\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

证明： 结论变形为 $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=-\dfrac{2}{1-x}$

解此方程我们可得所构造函数 $h(x)=(1-x)f(x)$

$\because h(0)=h(1)$

$\therefore$ 由罗尔定理得 $\exists\varphi\in(0,1)\ s.t.\ h'(\varphi)=0$

又 $h'(x)=(1-x)f'(x)-f(x)$

$\because h'(1)=h'(\varphi)=0$

$\therefore$ 由罗尔定理得 $\exists\xi\in(\varphi,1)$

$s.t. h''(\xi)=0$，即证

例题 2 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，证明：对 $\forall a$，均存在 $\xi\in(0,1)$，

使得 $f'(\xi)+a[f(\xi)-\xi]=1$

证明： 结论变形为 $(f'(x)-1)+a(f(x)-x)=0$

则可构造 $h(x)=(f(x)-x)e^{ax}$

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)>0, h(1)<0$，由零点存在定理得 $\exists\varphi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

$s.t.\ h(\varphi)=0 \because h(0)=h(\varphi)=0$

$\therefore$ 由罗尔定理得 $\exists\xi\in(0,\varphi) s.t.\ h'(\xi)=0$，得证

例题 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证: $\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

证明： $f'(x)f(1-x)-f'(1-x)f(x)=0$

即 $(f(x)f(1-x))'=C$

$h(x)=f(x)f(1-x)$

$h(0)=h(1)=0$

由罗尔定理得 $\exists\xi\in(0,1), s.t.\ h'(\xi)=0$

得 $f'(\xi)f(1-\xi)-f'(1-\xi)f(\xi)=0$

又 $f(x)>0$，得证 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

类题 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证明：对于任意的正数 a，$\exists\xi\in(0,1)$，

使得 $\dfrac{af'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

证明： 等式两边积分得$f(x)^a f(1-x)=C$

$h(x)=f(x)^a f(1-x)$，$h(0)=h(1)=0$，由罗尔定理得$\exists\xi\in(0,1),s.t.\ h'(\xi)=0$

得$f'(\xi)f(1-\xi)-f'(1-\xi)f(\xi)=0$，又$f(x)>0$，得证$\dfrac{af'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

类题 2 设$f(x)$在$[a,b]$可导，$f(a)=0$，$\forall x\in(a,b]$，$f(x)>0$，证明：对于任意$m,n>0$，$\exists\lambda,\mu\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\dfrac{m}{n}\dfrac{f'(\mu)}{f(\mu)}$

证明： 由前两题得铺垫我们可以令$\mu=a+b-\lambda$转为为单一变量进行证明

令$h(x)=f(x)^n f(a+b-x)^{-m}$

$h(a)=h(b)=0$

由罗尔定理得$\exists\xi\in(0,1),s.t.\ h'(\xi)=0$

又$f(x)>0$

可得$\dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\dfrac{m}{n}\dfrac{f'(\mu)}{f(\mu)}(\mu=a+b-\lambda)$

例题 4 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$g'(x)\neq 0$，证：$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明： $(f(a)-f(x))g'(x)-(g(x)-g(b))f'(x)=0$

有$[(f(a)-f(x))(g(x)-g(b))]'=0$

$h(x)=(f(a)-f(x))(g(x)-g(b))$

$h(a)=h(b)=0$

由罗尔定理得$\exists\xi\in(0,1),s.t.\ h'(\xi)=0$

又$g'(\xi)\neq 0$

得$\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例题 5 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$二阶可导，$g''(x)\neq 0$，$g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$，证明：

（1）在(a,b)内，$g(x)\neq 0$　　(2) $\exists\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

证明： (1) 反证，假设$\exists\varphi\in(a,b)s.t.\ g(\varphi)=0$

则$g(a)=g(b)=g(\varphi)=0$

由两次罗尔定理知$\exists\xi\in(a,b)$

$s.t.\ g''(\xi)=0$与题意矛盾，故不存在

(2) $f(x)g''(x)-g(x)f''(x)=0$

$f(x)g''(x)+f'(x)g'(x)-(f'(x)g'(x)+g(x)f''(x))=0$

$(f(x)g'(x)-g(x)f'(x))'=0$

所以令$h(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$

$\because h(a)=h(b)\ \therefore\exists\xi\in(a,b)\quad s.t.\ h'(\xi)=0$

得证

例题 6 设函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=g(a)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，

使得 $f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$

证明： 与上题类似

$(f''(x)g(x)+f'(x)g'(x))+(f'(x)g'(x)+f(x)g''(x))=0$

$(f(x)g(x))''=0$

$h(x)=f(x)g(x)$

$\because h(a)=h(b)\ \therefore \exists\varphi\in(a,b)\quad s.t.\ h'(\varphi)=0$

又$h'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

$\because h'(a)=h'(\varphi)=0\ \therefore\exists\xi\in(a,\varphi)\quad s.t.\ h''(\xi)=0$，得证

例题 7 $f(x)$二阶可导，$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证：$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在$(0,1)$内至少有两个根.

证明： 根据题目我们想到构造函数$h(x)=f(x)f'(x)$,下分析题目条件

由$\lim\limits_{x->0}\dfrac{f(x)}{x}<0$，得$f(0)=0$,且$\exists\alpha\in(0,\delta),s.t.\ f(\alpha)<0$

$\because f(a)<0,f(1)>0$，$\therefore$由零点存在定理得$\exists\beta\in(\alpha,1),s.t.f(\beta)=0$

$\because f(0)=f(\beta)=0\ \therefore$由罗尔定理得$\exists\varphi\in(0,\beta),s.t.\ f'(\varphi)=0$

则$h(0)=h(\beta)=h(\varphi)=0$

应用两次罗尔定理后得证

例题 8 $f(x)$在$[a,b]$连续，且存在$c\in(a,b)$满足$f'(c)=0$，证明:$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

证明： 同样的，通过微分方程，我们可以构造$h(x)=(f(x)-f(a))e^{-\frac{x}{b-a}}$

已知α为$h(x)$一零点,现通过题目条件寻找另一个零点。

$f'(c)=0$,故想到$h(c)=(f(c)-f(a))e^{-\frac{c}{b-a}}$

1^0若$f(c)=f(a)$,则罗尔定理易得$\exists\xi\in(a,b),s.t.h'(\xi)=0$

2^0若$f(c)\neq f(a)$,不妨设$f(c)>f(a)$，则有$h(c)>0$

且$h'(c)=-\dfrac{(f(c)-f(a))e^{-\frac{c}{b-a}}}{b-a}<0$由$h(a)=0,h(c)>0,h'(c)<0$,

得$h(x)$在$[a,c]$上的最大值M必在(a,c)取到，即$h(x_0)=M\Rightarrow h'(x_0)=0$

则取$\xi=x_0$,得证,同理$f(c)<f(a)$时，也成立类似结论,综上得证

已知a为$h(x)$一零点，现通过题目条件寻找另一零点

可通过反证法，假设$\forall x\in(a,b)$,有$h(x)>0$

则$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\varphi)>0$成立

则有$f'(\varphi)>0$成立$\varphi\in(a,x)$由于x的任意性

我们可得$\forall x\in(a,b)\,f'(x)>0$与题意矛盾

所以假设不成立，即存在另一点$\beta\in(a,b),s.t.\ h(\beta)=0$

$\because h(a)=h(\beta)=0$，$\therefore\exists\xi\in(a,\beta)s.t.\ h'(\xi)=0$,得证

套路四

例题 1 $f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，证:$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

证明：法一（罗尔定理+辅助函数）

$F(x)=(x^2-a^2)[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)[f(x)-f(a)]$,

因为$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,且$F(a)=F(b)=0$.

由罗尔定理,存在$F'(\xi)=0$，即$2\xi[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f'(\xi)=0$

得证

法二（柯西中值定理）

令$g(x)=x^2$.

(1)如果$0\in(a,b)$且$f'(0)=0$,则取$\xi=0$,则结论成立.

(2)如果$0\notin(a,b)$或$0\in(a,b)$但$f'(0)\neq 0$,则$f'(x)$与$g'(x)$不同时为零.

从而由柯西中值定理,存在$\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$由此即得所证.

例题 2 设$a,b>0$，证:$\exists\xi\in(a,b)$，使得$ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$

证明： 对于$f(x)=\dfrac{e^x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$应用Cauchy中值定理,

可知必存在$\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\dfrac{\frac{e^\xi(\xi-1)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)e^\xi$

整理即得到$ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$

套路五

例题 1 设$f(x)$在$[a,b]$可导,$f(a)=f(b)=1$，证明:$\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b),s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$;

证明： 令$F(x)=e^xf(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,故存在$\xi_2\in(a,b)$

使$\dfrac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-\mathrm{a}}=F'(\eta)=e^{\xi_2}(f(\xi_2)+f'(\xi_2))$. 由题设$f(a)=f(b)=1$,

故左端又等于$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$，由于$f(x)=e^x$在$[a,b]$上满足拉格朗日定理,

故$\exists\xi_1\in(a,b)$使$\dfrac{e^b-e^a}{b-\mathrm{a}}=f'(\xi_1)$从而有$e^{\xi_2}[f(\xi_2)+f'(\xi_2)]=e^{\xi_1}$成立

,变形即得所要结论.

例题 2 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，且$a>0$，$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

证明： 应用拉格朗日中值定理得$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

为得结论需$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)\Leftrightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$,

事实上,对函数$f(x)$与$g(x)=x^2$在$[a,b]$上应用柯西中值定理即可证明结论.(拉格+柯西)

例题 3 $f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)可导，且$0<a<b<\frac{\pi}{2}$，证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\frac{\sin\eta}{\cos\xi}$

证明： 这里我们应用两次柯西

首先有$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi},\frac{f(b)-f(a)}{\cos b-\cos a}=\frac{f'(\eta)}{-\sin\eta}$

两式相除得$\frac{\sin b-\sin a}{\cos b-\cos a}=\frac{f'(\eta)\cos\xi}{-\sin\eta f'(\xi)}$

由和差化积公式得$\frac{\sin b-\sin a}{\cos b-\cos a}=-\cot\frac{a+b}{2}$

代入得证

例题 4 设$f(x)$在$[1,2]$连续，$(1,2)$可导，$f'(x)\neq 0$， 证明:$\exists\xi$、η、$\gamma\in(1,2)$，$s.t.$ $\frac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\frac{\xi}{\eta}$

证明： 同样应用两次柯西

首先有$\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$,

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\gamma)$

两式相除得$\frac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\frac{\xi}{\frac{1}{\ln 2}}$

显然$\frac{1}{\ln 2}\in(1,2)$，故取$\eta=\frac{1}{\ln 2}$即可

例题 5 设$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$二阶连续可导，$f'(0)=0$，证:$\exists\xi$、$\eta$、$\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，s.t. $f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

证明： 先柯西有$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\cos(\pi)-\cos(0)}=\frac{f'(\xi)}{-2\sin(2\xi)}=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{-2}$

注意到所证等式右边为二阶，自然想到泰勒公式

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)+\frac{\pi^2}{8}f''(w)$

上两式联立得$\frac{f'(\xi)}{\sin(2\xi)}=\frac{\pi^2}{8}f''(w)$

即$f'(\xi)=\frac{\pi^2}{8}\sin(2\xi)f''(w)$

取$\eta=\frac{4}{\pi}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$即证

套路六

例题 1 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:

(1) $\exists c\in(0,1)$，使得$f(c)=\frac{1}{2}$　　(2)$\exists\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$，使得$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$

证明：(1)令$g(x)=f(x)-\frac{1}{2},g(0)=-\frac{1}{2},g(1)=\frac{1}{2}$

则有零点存在定理得$\exists c\in(0,1),s.t.\ g(c)=0$，即$f(c)=\frac{1}{2}$

(2)将结论变形为$\dfrac{\frac{1}{2}-0}{f'(\xi)}+\dfrac{1-\frac{1}{2}}{f'(\eta)}=1$

$\because f(0)=0,f(1)=1\therefore$由介值定理得$\exists x_0\in(0,1)$

$s.t.\ f(x_0)=\frac{1}{2}$,由拉格朗日中值定理得$\exists\xi\in(0,x_0),\eta\in(x_0,1)$

$s.t.\ f(x_0)-f(0)=f'(\xi)\quad f(1)-f(x_0)=f'(\eta)$

由此易证

类题1 $f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:$\exists\xi\neq\eta$，s.t. $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b(a,b>0)$

证明：$\because 0<\dfrac{a}{a+b}<1$而$f(0)=0,f(1)=1,\therefore$由$f(x)$连续知,$\exists x_1\in(0,1)$,

使得$f(x_1)=\dfrac{a}{a+b}$,$f(x)$在$[0,x_1],[x_1,1]$上分别用拉格朗日中值定理,

有$f(x_1)-f(0)=(x_1-0)f'(\xi),\xi\in(0,\mathrm{x}_1)\ f(1)-f(x_1)$

$=(1-x_1)f'(\eta),\eta\in(x_1,1)$注意到$f(0)=0,f(1)=1$

有$x_1=\dfrac{f(x_1)}{f'(\xi)}=\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}\qquad 1-x_1=\dfrac{1-f(x_1)}{f'(\eta)}=\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\eta)}$

上两式相加可得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

类题2 $f(x)$在$[0,1]$单调可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:存在互不相同的ξ_i，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=n$

证明：取$\mu_{\mathrm{i}}=\dfrac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$.在区间$[0,1]$上用连续函数介值定理,由于$f(0)<\mu_1<f(1)$,

故存在$c_1\in(0,1)$使得$f(c_1)=\mu_1=\dfrac{1}{n}$,再在区间$[c_1,1]$上,由于$f(c_1)<\mu_2<f(1)$

故存在$c_2\in(c_1,1)\mathrm{s.t.}\ f(2)=\mu_2=\dfrac{2}{n},\cdots\cdots$,存在$c_{\mathrm{n}-1}\in(c_{\mathrm{n}-2},1)$

使得$f(c_{n-1})=\mu_{n-1}=\dfrac{n-1}{n}$.在区间$[0,c_1],[c_1,c_2],\cdots,[c_{_{n-1}},1]$上分别用拉格朗日定理可得:

$f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{c_1-0}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{c}(0<x_1<c_1),f'(x_2)=\dfrac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{c_2-c_1}$,

$(c_1<x_2<c_2),f'(x_n)=\dfrac{f(1)-f(c_{n-1})}{1-c_{n-1}}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{1-c_{n-1}}(\mathrm{c}_{n-1}<x_n<1)$.

于是,$\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\dfrac{1}{f'(x_i)}=n,0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$.

类题 3 $f(x)$在$[0,1]$单调可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1(\lambda_i>0)$,

证: $\exists$不同的$\xi_i\in(0,1)$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

证明: 记$\frac{\sum_{k=1}^{i}\lambda_k}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}=t_i$,且令$t_0=0$,则原式可看作$\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i-t_{i-1}}{f'(\xi_i)}=1$

由介值定理, $\exists\alpha_i\in[0,1], s.t.\ 0=f(0)<f(a_1)<f(a_2)<\ldots\ldots<f(a_n)=1$

且$f(a_i)=t_i$,则$t_i-t_{i-1}=f(a_i)-f(a_{i-1})=(a_i-a_{i-1})f'(\xi_i)$

则$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=a_n-a_0=1$

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$连续, $(0,1)$可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证:

(1) $\exists c\in(0,1)$, 使得$f(c)=1-c$ (2)$\exists\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$, 使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

分析: 只需将$[0,1]$分成两个区间,使$f(x)$在两个区问各用一次微分中值定理,

设分点为$x_0\in(0,1)$,由$f(x_0)-f(0)=f'(\xi)(x_0-0)$,$f(1)-f(x_0)=f'(\eta)(1-x_0)$

$(0<\xi<x_0<\eta<1)$,得$f'(\xi)=\frac{f(x_0)}{x_0}$,$f'(\eta)=\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}$,

则$f'(\xi)f'(\eta)=1\Leftrightarrow\frac{f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}=1$.

$\Leftrightarrow x_0$是方程$f(x)[1-f(x)]=x(1-x)$的根.所以取x_0是方程$f(x)=1-x$的根即可.

证明: (1)$g(x)=f(x)+x-1$

$g(0)=-1$,$g(1)=1$,由零点存在定理得

$\exists c\in(0,1)$,s.t. $g(c)=0$,即$f(c)=1-c$

(2) 在$[0,c]$和$[c,1]$上对f(x)分别应用拉格朗日中值定理,

知存在两个不同的点$\xi\in(0,x_0)$,$\eta\in(x_0,1)$,$s.t.f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}$,

$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}$.于是$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-x_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{1-x_0}=1$

例题 3 $f(x)\in C[0,1]$, 在$(0,1)$可导, $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{4}$, 证:$\exists\xi\neq\eta$, s.t. $f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

证明: $f'(\xi)+\xi=\eta-f'(\eta)$

$g(x)=f(x)+\frac{x^2}{2}$ $h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$, 即证$g'(\xi)+h'(\eta)=0$

$g\left(\frac{1}{2}\right)-g(0)=\frac{g'(\xi)}{2}=\frac{1}{8}+f\left(\frac{1}{2}\right)\quad\left(\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$,

$h(1)-h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{h'(\eta)}{2}=-\frac{1}{8}-f\left(\frac{1}{2}\right)\quad\left(\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)\right)$, 两式相加得$g'(\xi)+h'(\eta)=0$即证

例题 4 设$f(x)\in C[0,1]$，$\int_0^1 f(x)dx\neq 0$，证明:存在互异的三个数$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1]$，满足下列等式——

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3=\left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)$$

证明： 令$F(x)=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{dt}}{\int_0^1 f(t)\mathrm{dt}}$,则$F(0)=0,F(1)=1$且函数$F(x)$在闭区间$[0,1]$上可导,由介值定理

存在点$x_3\in(0,1)$,使得$F(x_3)=\dfrac{1}{2}$.再分别在区间$[0,x_3]$,

$[x_3,1]$上利用拉格朗日中值定理,存在点$\mathrm{x}_1\in(0,\mathrm{x}_3)$,使得$F(x_3)-F(0)=F'(x_1)(x_3-0)$,

即$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{dt}+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$,

且存在$x_2\in(x_3,1)$,使得$F(1)-F(x_3)=F'(x_2)(1-x_3)$,

即 $\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{dt}+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3)$，综上得证

例题 5 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$f'(x)\neq 0$，$f(a)=0$，$f(b)=2$，证明:$\exists\xi,\eta\in(a,b)$且$\xi\neq\eta$

使得$f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[bf'(\eta)-1]$

（事实上，本题在视频里并未讲解，视频的最后，是另一道题：

设$f(x),g(x)$在$[0,1]$可导，$\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$，证明：存在两个不同的点$\xi$，$\eta$，

使得$f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$。）

思路：为了使ξ,η不同,应分别在不同区间内寻找;

把带ξ的式子和带η的式子分离在等式两边,分开寻找辅助函数用中值定理.

证明： 要证的等式可化为$\dfrac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=b-\dfrac{1}{f'(\eta)}$即要求两边等于同一常数,记作$c$(待定),

于是化为$b-\dfrac{1}{f'(\eta)}=c(1),\dfrac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=c(2)$将(1)式表示为$1=f'(\eta)(b-c)$

课件，只要有$f(b)-f(c)=1$,在$[c,b]$区间上对$f(x)$用拉格朗日中值定理知:

$\exists\eta\in(c,b)$,使(1)成立.由于$f(b)=2$,需要有$f(c)=1$,即可.由于$f(x)\in\mathrm{C}[a,b]$,

且$f(a)=0,f(b)=2$,根据介值定理,存在点$c\in(a,b)$,使$f(c)=1$.

将(2)式变为$f(\xi)+(\xi-c)f'(\xi)=0$令函数$F(x)=(x-c)f(x)$,

因为$F(x)\in\mathrm{C}[a,c]$,在(a,c)内可导,且$F(a)=F(c)=0$,

由罗尔定理得，$\exists\xi\in(a,c)$,使$F'(\xi)=0$,即$f(\xi)+(\xi-c)f'(\xi)=0$.综上得证

套路七

例题 1 设$f(x)$在$[-1,1]$三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证:$\exists\xi\in(-1,,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

证明： 法1：（泰勒公式）

$f(1)$，$f(-1)$分别在0处展开

$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6}$

$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(x)}{2}-\frac{f'''(\xi_1)}{6}$

两式相减得$3=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$

由介值定理得$\exists\xi\in(0,1)\ s.t.\ f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$，得证

法2：(构造多项式函数)

$f'''(x)=3$

积分得$f'(x)=\frac{3}{2}x^2+C_1x+C_2$

$f'(0)=0$,得$C_2=0$

继续积分得$f(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{C_1}{2}x+C_3$

代入题目条件得$C_1=0$，$C_3=\frac{1}{2}$

故构造$h(x)=\frac{x^3+1}{2}-f(x)$

$h(-1)=h(1)=h'(0)=0$

通过两次罗尔定理易证

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$，证: $\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geqslant 8$

证明： 设$f(x)$在$x=a\in(0,1)$处取得最小值,则$f(a)=-1,f'(a)=0$

利用泰勒公式：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$

设$f(x)$在$x=a\in(0,1)$处取得最小值,则$f(a)=-1,f'(a)=0$

利用泰勒公式：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$

分别令$x=0,x=1$得 $0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2$, $(0<\xi_1<a)$ $0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2,(a<\xi_2<1)$

若$0<a<\frac{1}{2}$,取$\xi=\xi_1$得$f''(\xi)>8$;若$\frac{1}{2}\leqslant a<1$,取$\xi=\xi$得$f''(\xi)\geqslant 8$.

综上,至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使$f''(\xi)\geqslant 8$.

例题 3 设$f(x)$在$x=x_0$的邻域内四阶可导，$|f^{(4)}(x)|\leqslant M\,(M>0)$，证:对此邻域上任意一个不同于$x_0$的点$a$，有$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\leqslant\frac{M}{12}(a-x_0)^2$（其中$b$是$a$关于$x_0$的对称点）

证明： 由题意$a+b=2x_0$,将$f(a),f(b)$在x_0展开

$$f(a)=f(x_0)+(a-x_0)f'(x_0)+\frac{(a-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\frac{(a-x_0)^3}{6}f'''(x_0)+\frac{(a-x_0)^4}{24}f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f(b)=f(x_0)+(b-x_0)f'(x_0)+\frac{(b-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\frac{(b-x_0)^3}{6}f'''(x_0)+\frac{(b-x_0)^4}{24}f^{(4)}(\xi_2)$$

则$f(a)+f(b)-2f(x_0)=(a-x_0)^2f''(x_0)+\dfrac{(a-x_0)^4}{24}\left(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right)$

$\left|f''(x_0)-\dfrac{(f(a)+f(b)-2f(x_0))}{(a-x_0)^2}\right|=\dfrac{(a-x_0)^4}{24}\left|\left(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right)\right|\leqslant\dfrac{(a-x_0)^4M}{12}$，得证

类题 1 $f(x)$在$[a,b]$二阶连续可导,证:$\exists\xi\in(a,b)$,使$f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$

证明：［**法一**］：　设$F(x)=f(x)-2f\left(\dfrac{a+x}{2}\right)+f(a),g(x)=(x-a)^2$,

则 $F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件,$F(a)=G(a)=0$,

则存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\dfrac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\dfrac{f'(\xi_1)-f'\left(\frac{\xi_1+a}{2}\right)}{2(\xi_1-a)}$

又由 $f'(x)$ 在 $\left[\dfrac{\xi_1+a}{2},\xi_1\right]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 所以存在

$\xi\in\left(\dfrac{\xi_1+a}{2},\xi_1\right)\subset(a,b)$使得 $\dfrac{f'(\xi_1)-f'\left(\frac{\xi_1+a}{2}\right)}{2(\xi_1-a)}=\dfrac{1}{4}\dfrac{f'(\xi_1)-f'\left(\frac{\xi_1+a}{2}\right)}{\left(\xi_1-\frac{\xi_1+a}{2}\right)}$

$=\dfrac{1}{4}f''(\xi)$，从而$f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\dfrac{(b-a)^4}{4}f''(\xi)$

［**法二**］：

$F(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(x)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a),\quad x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]F(a)=0$

$F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)$，因为$F(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上

满足拉格朗日中值定理的条件，于是存在 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$,

使得 $F\left(\dfrac{b+a}{2}\right)=F\left(\dfrac{b+a}{2}\right)-F(a)=F'(\xi_1)\dfrac{b-a}{2}=\left(f'\left(\xi_1+\dfrac{b-a}{2}\right)-f'(\xi_1)\right)\dfrac{b-a}{2}$

又因为 $f'(x)$ 在 $\left[\xi_1,\xi_1+\dfrac{b-a}{2}\right]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,

所以存在 $\xi\in\left(\xi_1,\xi_1+\dfrac{b-a}{2}\right)$, 使得 $f'\left(\xi_1+\dfrac{b-a}{2}\right)-f'(\xi_1)=f''(\xi)\dfrac{b-a}{2}$

由此得$f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f''(\xi)\dfrac{(b-a)^2}{4}$

类题 2 $f(x)$在$[a,b]$三阶连续可导,证:$\exists\xi\in(a,b)$,使$f(b)=f(a)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)+\dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$

证明：将$f(a)$，$f(b)$在$\dfrac{a+b}{2}$展开

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^3}{48}f'''(\xi_1)$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(\xi_2)$$

两式相减得$f(b)-f(a)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)=\frac{(b-a)^3}{24}\left(\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\right)$

由介值定理得$\exists\xi\in(a,b)\ s.t.\ f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$

由此得证

例题 4 在一条笔直的道路上，一辆汽车从开始启动到刹车停止用单位时间走完了单位路程，证明：至少有一个时间点，其加速度的绝对值不小于 4.

证明： 设运动规律为$S=S(t)$，则$S(0)=0,S'(0)=0,S(1)=1,S'(1)=0$由泰勒公式得

$S\left(\frac{1}{2}\right)=S(0)+S'(0)\left(\frac{1}{2}-0\right)+\frac{S''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^2$，其中$\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

$S\left(\frac{1}{2}\right)=S(1)+S'(1)\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{S''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2$，其中$\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

两式相减得$S''(\xi_1)-S''(\xi_2)=8$，于是$|S''(\xi_1)|+|S''(\xi_2)|\geq 8$.

(1) 当$|S''(\xi_1)|\geq|S''(\xi_2)|$时，$|S''(\xi_1)|\geq 4$，即$t=\xi_1$处加速度绝对值不小于4

(2) 当$|S''(\xi_1)|<|S''(\xi_2)|$时，$|S''(\xi_2)|\geq 4$，即$t=\xi_2$处加速度绝对值不小于4

类题 $f(x)$在$[a,b]$上n阶可导$(n\geq 2)$，满足$f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$|f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$

证明： 将$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$在$a$处和$b$处展开，由$f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$得

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^n f^{(n)}(\xi_1)}{2^n n!}\quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(a-b)^n f^{(n)}(\xi_2)}{2^n n!}$

两式相减得$|f(b)-f(a)|\leq|\frac{f^{(n)}(\xi_1)+f^{(n)}(\xi_2)}{2}|\frac{(a-b)^n}{2^{n-1}}$

由介值定理得$\exists\xi\in(a,b)\ s.t.\ f^{(n)}(\xi)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)+f^{(n)}(\xi_2)}{2}$，代入得证

例题 5 $f(x)$在$(0,+\infty)$三阶可导，且$f(x)$和$f'''(x)$有界，证明：$f'(x)$和$f''(x)$在$(0,+\infty)$也有界

证明： 根据题目条件，

$f(x)$在x处的泰勒公式为$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f''(\xi)(x-x_0)^3$

这里ξ介于x与x_0之间。

分别取$x_0=x$，且x取$x+1,x-1$有:$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f''(\xi_1)$

其中 $x-1<\xi_2<x<\xi_1<x+1$，$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{6}f''(\xi_2)$

两式相加消去$f(x)$得$f'(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)]$

两式相减消去$f'(x)$得$f'(x)=\frac{1}{2}[f(x+1)-f(x-1)]-\frac{1}{12}[f''(\xi_2)+f''(\xi_1)]$

由$f^{(3)}(x)$和$f(x)$有界，可知$f(x)$，$f''(x)$也有界。

例题 6 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，且$|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，证：$|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$恒成立

证明： $\forall x\in[0,1]$,将$f(x)$在c点处展开成泰勒公式,

得$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$,

其中ξ在c与x之间.当$x=0,1$时,分别有 $f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\dfrac{f''(\xi_0)}{2}(-c)^2(0<\xi_0<c)$

$f(1)=f(\mathrm{c})+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2(\mathrm{c}<\xi_1<1)$

两式相减,得$f(1)-f(0)=f'(c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2-\dfrac{f''(\xi_0)}{2}c^2$,

即$f'(c)=f(1)-f(0)+\dfrac{f''(\xi_0)}{2}c^2-\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2$.

两边取绝对值,由绝对俱不等式及$|f(1)|\leqslant a,|f(0)|\leqslant a,|f''(\xi_0)|\leqslant b,|f''(\xi_1)|\leqslant b$,

得$|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}[(1-c)+c]=2a+\dfrac{b}{2}$,

其中$0<1-c<1,0<c<1$,所以$(1-c)^2<1-c,c^2<c$.

类题 1 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|$ $(i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$

证明： 由泰勒展开得$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\dfrac{f''(\xi)}{2}$,

$\xi\in(x,x+h),f(x-h)=f(x)+hf'(x)+\dfrac{f''(\eta)}{2},\eta\in(x-h,x)$

相减得$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\dfrac{h^2}{2}[f''(\xi)-f''(\eta)]$

$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-\dfrac{h^2}{2}[f''(\xi)-f''(\eta)]$

下有两种处理方法:

法一： $2|f'(x)|h\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|+\dfrac{1}{2}h^2(|f''(\xi)|+|f''(\eta)|)\leqslant 2M_0+h^2M_2$

即 $M_2h^2-2|f'(x)|h+2M_0\geqslant 0$ 对一切 h 成立.

故判别式 $|f'(x)|^2-2M_0M_2\leqslant 0$,

即 $M_1=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|f'(x)|^2\leqslant 2M_0M_2$ 对一切x成立.

法二：$|f'(\mathrm{x})|\leqslant\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{hM_2}{2},\forall h>0$而$\dfrac{M_0}{h}\cdot\dfrac{hM_2}{2}=\dfrac{1}{2}M_0M_2$为常数

.所以将右端看成关于h的函数，当$\dfrac{M_0}{h}=\dfrac{hM_2}{2}$取最小.令$h=\sqrt{2M_0/M_2}$,

代人得$|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$， $\forall x\in(-\infty,+\infty)$所以 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

类题 2 设$f(x)$在$(0,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|$ $(i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\leqslant 4M_0M_2$

证明： 由上题显然.

套路八

例题 1 设$f''(x)>0$，证明：(1) $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$；(2) $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

证明：(1) 令$h(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$

$\because h'(x)=f'(x)-f'(x_0), h''(x_0)=f''(x)>0$

$\therefore h(x)$在$(-\infty,x_0)$减$(x_0,+\infty)$增，则$h(x)>h(x_0)=0$

得证

(2) 不妨设$x_2>x_1$令$t(x)=\dfrac{f(x)+f(x_2)}{2}-f\left(\dfrac{x+x_2}{2}\right)\quad(x\leqslant x_2)$

$$t'(x)=\frac{f'(x)-f'\left(\frac{x+x_2}{2}\right)}{2}=\frac{x-x_2}{4}f''(\varepsilon)<0$$

$t(x)\leqslant t(x_2)=0$，得证

类题 设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f''(x)>0$，取$x_i\in[a,b]\ (1\leqslant i\leqslant n)$，设$k_i>0$且$k_1+k_2+\cdots k_n=1$，证明：

$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots k_nf(x_n)$

证明：用数学归纳法证明：首先由凹函数定义可知，当$n=1,2$时，不等式显然成立。

假设不等式在$n=k$下成立，下证在$n=k+1$下成立。

$n=k+1$时$\displaystyle\sum_{\mathrm{i}=2}^{k+1}\frac{\lambda_i}{\mu}=1$，因此$f(\lambda_1x_{\mathrm{A}}+\mu x_{\mathrm{B}})\leq\lambda_1f(x_{\mathrm{A}})+\mu f(x_{\mathrm{B}})$

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_ix_{\mathrm{i}}\right)\leq\lambda_1f(x_1)+\mu f\left(\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k}+1}\frac{\lambda_i}{\mu}x_{\mathrm{i}}\right)\leq\lambda_1f(x_1)+\mu\sum_{\mathrm{i}=2}^{k+1}\frac{\lambda_i}{\mu}f(x_{\mathrm{i}})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{k+1}\lambda_if(x_{\mathrm{i}})$$

综上得证

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，且$\displaystyle\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=0$，则(　　)

(A) 当$f'(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(B) 当$f''(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(C) 当$f'(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(D) 当$f''(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

证明：$f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)f'\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}f''(\xi)$

积分得$0=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f''(\xi)\dfrac{1}{24}$

根据选项判断

D正确

例题 3 设$f''(x)>0$，取$x=x_0$，$\Delta x>0$，令$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，试比较$\Delta y$和$\mathrm{d}y$的大小，并解释其几何意义。

解：$\triangle y-\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x-f(x_0+\Delta x)+f(x_0)$

令$g(x)=f'(x_0)x-f(x_0+x)+f(x_0)\quad (\mathrm{x}>0)$

$\because g'(x)=f'(x_0)-f'(x_0+x)<0\therefore \mathrm{g}(x)<\mathrm{g}(0)=0$

即$\triangle y>\mathrm{d}y$

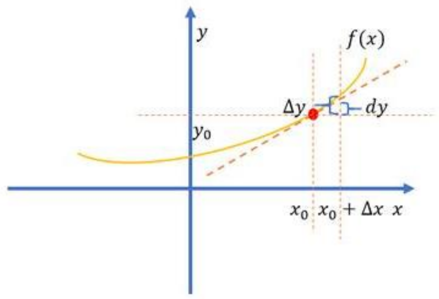
$\triangle y$是一个区间$\triangle x$上的y的差值；$\mathrm{d}y$表示的是区间上$\triangle x$切线的差值，如下图所示。

自变量在$x=x_0$的基础上，若增加$\triangle x$，此时函数增量$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)$。

当函数$f(x)$在点$x=x_0$处可导时，即函数$f(x)$在$x=x_0$处存在一条切线，

那么微分$\mathrm{d}y=f'(x_0)\triangle x$。由于默认自变量增量$\triangle x$、$\mathrm{d}x$均为一个单位，

因此，$\triangle x=\mathrm{d}x$，进而$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$。



套路九

例题 1 设$f(x)$在$[0,4]$二阶可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(4)=2$，证明：$\exists\xi\in(0,4)$，使得$f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

证明： 由$f''(x)=-\dfrac{1}{3}$,积分得$f'(x)=-\dfrac{x}{3}+\mathrm{C}_1$再次积分得

$f(x)=-\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{C}_1x+\mathrm{C}_2\quad f(0)=0,f(1)=1,f(4)=2$代入得

$\mathrm{C}_1=\dfrac{7}{6}\quad \mathrm{C}_2=0$，故令$h(x)=f(x)+\dfrac{x^2-7x}{6}$

$h(0)=h(1)=h(4)$，运用两次罗尔定理得证

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，证明:$\exists\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$.

证明： 令$h(x)=-3x^2+4x-f(x)$,满足$h(0)=h(1)=0$

且$\displaystyle\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x=0$,得$\exists c\in(0,1)\ \ s.t.\ h(c)=0$

则$h(0)=h(1)=h(c)$，两次罗尔定理得$\exists\eta\in(0,1)$

s.t. $f''(\eta)=-6<-2$得证

例题 3 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$，证:$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geqslant 8$

证明： 设$f(x)$在$x=a\in(0,1)$处取得最小值,则$f(a)=-1,f'(a)=0$利用泰勒公式:

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$，分别令$x=0,x=1$得

$0=-1+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}a^2$，$(0<\xi_1<a)$；$0=-1+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2,(a<\xi_2<1)$

若$0<a<\frac{1}{2}$,取$\xi=\xi_1$得$f''(\xi)>8$;若$\frac{1}{2}\leqslant a<1$,取$\xi=\xi_2$得$f''(\xi)\geqslant 8$.

综上,至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使$f''(\xi)\geqslant 8$.

类题 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，并且$f(x)$和$g(x)$在(a,b)内存在相等的最大值，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$

证明： 令$F(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow F(x)$在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导,要证存在$\xi\in(a,b)$,

使得$F''(\xi)=0$,已知$F(a)=F(b)=0$,只需再证$\exists c\in(a,b),F(c)=0$.

由题设$\exists x_1\in(a,b),M=\max\limits_{[a,b]}f(x)=f(x_1),\exists x_2\in(a,b),M=\max\limits_{[a,b]}g(x)=g(x_2)$

若$x_1=x_2$,取$c=x_1=x_2,F(c)=0$.若$x_1\neq x_2$,不妨设$x_1<x_2$,

则$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0,\quad F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$

可得$\exists c\in(a,b),F(\mathrm{c})=0$.由$F(a)=F(c)=F(b)=0$,

对$F(x)$分别在$[a,c],[c,b]$用罗尔定理可知,$\exists\xi_1\in(a,c),\exists\xi_2\in(c,b)$,

使得$F'(\xi_1)=0,F'(\xi_2)=0$.再对$F'(x)$用罗尔定理可知,

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得$F''(\xi)=0$,即$f''(\xi)=g''(\xi)$.

例题 4 设$f(x)$在$[-1,1]$三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证: $\exists\xi\in(-1,,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

证明： 令$P(x)=\frac{x^3}{2}+\left(\frac{1}{2}-f(0)\right)x^2+f(0)$，并考虑辅助函数$F(x)=f(x)-P(x)$,

显然$F(x)$有连续的三阶导数 且$F(-1)=F(1)=F(0)=F'(0)=0$.

对$F(x)$在$[-1,0],[0,1]$上由罗尔定理，可知$\exists -1<\theta_1<0,\quad 0<\theta_2<1$,

s.t.$F'(\theta_1)=F'(\theta_2)=0$. 对$F'(x)$在$[\theta_1,0],[0,\theta_2]$上用罗尔定理，又可知

$\exists -1<\theta_1<\eta_1<0,\quad 0<\eta_2<\theta_2<1$.s.t.$F''(\eta_1)=F''(\eta_2)=0$.

对$F'''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上用罗尔定理得$\exists\xi\in(-1,1)$ s.t.$F''(\xi)=0$,即$f''(\xi)=3$.

套路十

例题 1 设 $f(x)=\arctan x,x\in[0,a]$, 若 $f(a)-f(0)=af'(\theta a),\theta\in(0,1)$. 求 $\lim\limits_{a\to 0}\theta^2$

解： $f(x),f'(x)$表达式代入得$\arctan a=\frac{a}{1+(\theta a)^2}$

解出$\theta^2=\frac{a-\mathrm{acrtan}\,a}{a^2\arctan a}$

$\lim\limits_{a->0}\theta^2=\lim\limits_{a->0}\frac{a-\mathrm{acrtan}\,a}{a^2\arctan a}=\frac{1}{3}$

例题 2 $f(x)$二阶连续可导，$f''(x)\neq 0$，若$f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h\ (0<\theta<1)$，证:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$

证明： $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\mu)$

那么$f'(x)+\frac{h}{2}f''(\mu)=f'(x+\theta h)\Rightarrow$

$-f'(x)+f'(x+\theta h)=\frac{h}{2}f''(\mu)\Rightarrow$

$\dfrac{-f'(x)+f'(x+\theta_n)}{\frac{h}{2}}=f''(\mu)$

二阶导数连续，考 $x<\mu<x+h$ 那么 $\lim\limits_{h\to 0}f''(\mu)=f''(x)$

那么 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-f'(x)+f'(x+\theta h)}{\frac{h}{2}}=f^{*}(x)$

而根据定义 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-f'(x)+f'(x+\theta_n)}{\theta_n}=f''(x)$

两式子相除，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\theta h}{\frac{h}{2}}=1$，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

例题 3 $f(x)$有$n+1$阶连续导数，若$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$ $(0<\theta<1)$，

且$f^{(n+1)}(a)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$

证明： 将$f(a+\mathrm{h})$展成到$n+1$阶导数,即

$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$其中$0<\theta_1<1$.

比较上述两个$f(a+h)$的展开式,有 $\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h}=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)h$

由函数$n+1$阶导数的定义,有 $\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\theta\cdot\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{\theta h}=\lim\limits_{\mathrm{k}\to 0}\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1\mathrm{h})$

即$f^{(n+1)}(a)\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$即证得$\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

例题 4 $f(x)$有n阶连续导数，$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$，

其中$0<\theta<1$，证明:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

证明： 将$f'(\mathrm{x}_0+\theta\mathrm{h})$在点$x=x_0$处展开成泰勒公式,得

$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\dfrac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)(\theta h)^{n-1}$,代入原式,

得 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h^n}=\dfrac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)\theta^{n-1}$令$h\to 0$,有

$\dfrac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\theta^{n-1}=\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h^n}=\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{nh^{n-1}}$

$=\cdots=\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\dfrac{f^{(n)}(x_0+h)}{n!}=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\theta^{n-1}=\dfrac{1}{n}\Rightarrow\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

例题 1 (1)设$f(x)$在(a,b)可导，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

(2)设$f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$

证明：(1)构造函数$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(a,b) \\ A & x=a,b \end{cases}$此时$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to b}f(x)=A=h(a)=h(b)$

$h(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，且由罗尔定理$\exists\xi\in(a,b)$，使得$h'(\xi)=0$

即$f'(\xi)=0$，得证

(2)构造函数$F(x)=\begin{cases} f(\tan x) & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ A & x=\pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$此时$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}F(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(\tan x)=A=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}F(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}f(\tan x)=A=F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，$F(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$连续，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$可导，

且$F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=A$由罗尔定理$\exists\eta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得$F'(\eta)=0$，

即$f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0$此时$f'(\tan\eta)=0$取$\xi=\tan\eta$即可得证

例题 2 $f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists\xi>0$，使得$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

证明：令$\xi=x\Rightarrow f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{1+x^2}+C$，

故作辅助函数$F(x)=f(x)-\frac{x}{1-x^2}$，显然$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内可导.

$\because 0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\therefore F(0)=0$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{1+x^2}\right]=0.\therefore F(x)$满足罗尔定理，于是$\exists\xi\in(0,+\infty)$，

s.t. $F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

例题 3 $f(x)$在$[0,+\infty)$可导，$f(0)=1$，且$|f(x)|\leqslant e^{-x}$，证明：$\exists\xi>0$，使得$f'(\xi)+e^{-\xi}=0$

证明：构造辅助函数$F(x)=f(x)-e^{-x}$，则$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续可导且$F(0)=0$，由于$|f(x)|\leqslant e^{-x}$，

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，这样就有$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，利用无穷区间上的罗尔定理就知道必然

存在一点ξ使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=-e^{-\xi}$.

例 4 (2020 年) $f(x)$在$[0,2]$连续可导，$f(0)=f(2)=0$，记$M=\max|f(x)|$，证明：

(1) 存在$\xi\in(0,2)$，使得$|f'(\xi)|\geq M$

(2) 若对$\forall x\in(0,2)$，均有$|f'(x)|\leqslant M$，则$M=0$

证明：(1)由最值定理可知：$|f(x)|$在$[0,2]$上必能取到最大值M，又由于$|f(0)|=|f(2)|=0$，

则必有$\eta\in(0,2)$s.t. $|f(\eta)|=M$，易知η与$2-\eta$中至少有一个是不超过1的.

不妨设$\eta\leq1$，则由拉格朗日中值定理可知：存在$\xi\in(0,\eta)$，

使得$f(\eta)=f(\eta)-f(0)=\eta f'(\xi)$，则$|f'(\xi)|=\frac{|f(\eta)|}{\eta}\geq M$.

(2) 假设 $M>0$，对 (1) 中的 ξ，由于 $|f'(\xi)|=\dfrac{M}{\eta}\leq M$，即 $\eta\geq 1$，

结合 (1) 中的 $\eta\leq 1$，可知 $\eta=1$。而 $M=|f(1)|=\left|\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1 M\,\mathrm{d}x=M.$

即 $\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x=M.$

又 $|f'(x)|\leq M$，则有 $|f'(x)|=M, x\in(0,1)$；

同理 $M=|f(1)|=\left|\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_1^2|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leq\int_1^2 M\,\mathrm{d}x=M.$

即 $\int_1^2|f'(x)|\,\mathrm{d}x=M$，又 $|f'(x)|\leq M$，则有 $|f'(x)|\equiv M, x\in(1,2)$。

则当 $x\in(0,2)$ 时，有 $f'(x)\equiv M$ 或 $f'(x)\equiv -M$，这与 $f(0)=f(2)=0$ 矛盾，故 $M=0$