NO.5-2 定积分计算（上）

套路一 定积分的常规计算技巧

例题 1 利用 N-L 公式，直接计算下列定积分

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x$

解： (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\arcsin x\,\mathrm{d}\arcsin x$

令 $\arcsin x=t$

原式 $\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos 2t\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\left(\frac{t\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt\right)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$；

(2) 令 $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$， $x=\tan^2 t$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\,\mathrm{d}\tan^2 t=t\tan t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t\,\mathrm{d}t=\pi-(\tan t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi-\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$

$\displaystyle=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$；

(3) 令 $t=\arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}$

则 $\tan t=\sqrt{\sqrt{x}-1}\Longrightarrow\tan^2 t+1=\sqrt{x}\Longrightarrow x=\sec^4 t$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\,\mathrm{d}\sec^4 t=t\sec^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{16\pi}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 t\,\mathrm{d}\tan t$

$\displaystyle=\frac{16\pi}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t+1d\tan t=\frac{16\pi}{3}-\left(\frac{\tan^3 t}{3}+\tan t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$；

(4) $\displaystyle\int\sin x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\cdot\ln\sin x+\int\frac{\cos x^2}{\sin x}\mathrm{d}x=-\cos x\cdot\ln\sin x+\int\frac{1-\sin x^2}{\sin x}\mathrm{d}x$

$=-\cos x\cdot\ln\sin x+\cos x-\ln(\csc x-\cot x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\ln\sin x\,dx=0-\lim_{x\to0}-\cos x\cdot\ln\sin x+\cos x+\ln(\csc x-\cot x)$$

$$=-1+\lim_{x\to0}\cos x\cdot\ln\sin x-\ln(\csc x-\cot x)$$

$$=-1+\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\cdot\ln\sin x-\ln(\csc x-\cot x)$$

$$=-1+\lim_{x\to0}\ln\sin x-\ln(\csc x-\cot x)-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^2\cdot\ln\sin x$$

$$=-1+\lim_{x\to0}\ln\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=-1+\ln\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\right)-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=\ln2-1;$$

例题 2 计算定积分$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$

解： $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+1}dx$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+1}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+2}d\tan x=2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\pi;$$

类题 1 计算定积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

解： $\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx\xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}-x}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}$

类题 2 以下计算是否正确？为什么？如果错了，请将其更正。

$$\int_{-1}^{1}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'dx=\arctan\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1}=\arctan1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

解： 错误，积分区间存在无定义的点。

正确做法：$\int_{-1}^{1}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'dx=\int_{-1}^{0}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'dx+\int_0^{1}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'dx$

$$=\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2};$$

类题 3 设$f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，计算$I=\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$

解： $I=\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_0^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_2^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$

$$=\left(\lim_{x\to0^-}\arctan f(x)-\arctan f(-1)\right)+\left(\lim_{x\to2^-}\arctan f(x)-\lim_{x\to0^+}\arctan f(x)\right)$$

$$+\left(\arctan f(3)-\lim_{x\to2^+}\arctan f(x)\right)$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi+\arctan\frac{32}{27};$$

例题 3 设$I_n=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，$J_n=\int_0^{2\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，请背住下列常用结论。

(1) 对于任意正整数n，均有$I_n=J_n$

(2) 当n是偶数时，$I_n=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

(3) 当n是奇数时，$I_n=0$

例题 4 计算$\int\frac{\sin 10x}{\sin x}\mathrm{d}x$

解： $\int\frac{\sin 10x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int 2\sum_{i=1}^{5}\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x=2\sum_{i=1}^{5}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+C$；

例题 5 计算$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$

解： $I_n-I_{n-1}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{2\cos 2nx\cdot\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}2\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 2nx}{n}\Big|_0^{\pi}=0$$

所以$I_n=I_0=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi$；

类题： 请证明：$a_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi$

解： 同理可得。

例题 6 若$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$，计算$a_n$；

解： $a_{n+1}-a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin(n+1)x+\sin nx)(\sin(n+1)x-\sin nx)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{2n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin(2n+1)x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

令$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$，$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2nx\cdot\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 2nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

所以$I_n=I_0=\dfrac{\pi}{2}$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{\pi}{2}$，因为$a_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，所以$a_n=\dfrac{n\pi}{2}$；

例题 7 计算积分$\displaystyle\int_0^1(1-x)^{100}x\ \mathrm{d}x$

解： $\displaystyle\int_0^1(1-x)^{100}x\,\mathrm{d}x\xrightarrow{t=1-x}\int_0^1 t^{100}(1-t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{100}(1-t)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^{101}}{101}-\frac{t^{102}}{102}\right)\Bigg|_0^1$

$\displaystyle=\frac{1}{101}-\frac{1}{102}=\frac{1}{101\times102}=\frac{1}{10302}$；

例题 8 计算积分$\displaystyle\int_0^2 x(x-1)(x-2)\ \mathrm{d}x$

解： $\displaystyle\int_0^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x\xrightarrow{t=x-1}\int_{-1}^1(t+1)t(t-1)\mathrm{d}t$

令$f(t)=(t+1)t(t-1)$，

$f(-t)=(-t+1)(-t)(-t-1)=-(t+1)t(t-1)=-f(t)$

所以$f(t)$是关于t的奇函数，$\displaystyle\int_{-1}^1(t+1)t(t-1)\mathrm{d}t=0$；

类题 计算积分$\displaystyle\int_0^{2n}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots[x-(2n-1)](x-2n)\ \mathrm{d}x$

解： $\displaystyle\int_0^{2n}x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\ldots[x-(2n-1)](x-2n)\mathrm{d}x$

$\displaystyle\xrightarrow{t=x-n}\int_{-n}^{n}(t+n)(t+(n-1))\ldots t\ldots(t-(n-1))(t-n)\mathrm{d}t$

$\displaystyle=\int_{-n}^{n}t(t^2-n^2)(t^2-(n-1)^2)\ldots.(t^2-1)\mathrm{d}t=0$；

例题 9 $\displaystyle\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^5x^n(1-x)^n\mathrm{d}x$

解： $\displaystyle\xrightarrow{t=x-\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|t|^5\left(t+\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}-t\right)^n\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|t|^5\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^n\mathrm{d}t$

$\displaystyle=2\int_0^{\frac{1}{2}}t^5\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^n\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}t^4\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^n\mathrm{d}t^2\xrightarrow{u=\frac{1}{4}-t^2}\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}-u\right)^2u^n\mathrm{d}u$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{16}-\frac{u}{2}+u^2\right)u^n\mathrm{d}u=\left(\frac{u^{n+1}}{16(n+1)}-\frac{u^{n+2}}{2(n+2)}+\frac{u^{n+3}}{n+3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}$

$\displaystyle=\frac{1}{4^{n+3}}\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{2}{(n+2)}+\frac{1}{(n+3)}\right)$；

定积分计算（下）

综合题型一 被积函数中含有变限积分函数的定积分计算

例题 1 设$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，计算$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$

解 1: $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\pi f(\pi)-\int_0^\pi x\,\mathrm{d}f(x)=\int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t-\int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x=2.$

类题 1 设$f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$，计算$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解 1: $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}=-2\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}f(x)=-2\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x\mapsto x^2} -4\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

$=-4\ln 2+8\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=8-2\pi-4\ln 2.$

类题 2 设$f'(x)=\arctan(x-1)^2$，且$f(0)=0$，求$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

解 1: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 x\,\mathrm{d}f(x)=\int_0^1 \arctan(x-1)^2\mathrm{d}x-\int_0^1 x\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x \xlongequal{(x-1)^2\mapsto x} \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$

类题 3 已知函数$f(x)$在$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$连续，在$\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$内是$\frac{\cos x}{2x-3\pi}$的一个原函数，$f(0)=0$

(1) 求$f(x)$在$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$上的平均值

(2)证明$f(x)$在$\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$内有唯一零点

解：(1) $\overline{f(x)}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\int_t^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3\pi}$;

(2)令 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}=0$，解得 $x=\dfrac{\pi}{2}$，于是 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减，在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内单调递增

而 $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx$ 　　可以用反证法！

$$>\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2x-3\pi}+\frac{\cos x}{2x+\pi}\right)dx=\cos\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2x-3\pi}+\frac{1}{2x+\pi}\right)dx$$

$$=\frac{\cos\xi}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)>0,\ \left(0<\xi<\frac{\pi}{2}\right)$$

并且 $f(0)=0$，由零点定理：$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内有唯一零点。

例题 2 设 $f(x)$ 为非负连续函数，满足 $f(x)\displaystyle\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x$，求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

解： $f(x)\displaystyle\int_0^x f(x-t)dt\overset{t\mapsto x-t}{=\!=\!=}f(x)\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2=\cos^4 x$，于是

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2=2\int_0^x\cos^4 t\,dt,\ \text{令 } x=\frac{\pi}{2}\text{，得到}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\sqrt{\frac{3\pi}{8}}$$.(非负连续函数积分值为正)

类题 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $x>-1$ 时，$f(x)\left[\displaystyle\int_0^x f(t)dt+1\right]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，求 $f(x)$

解： $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x f(t)dt+1\right]^2=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，于是 $\left(\displaystyle\int_0^x f(t)dt+1\right)^2-1=2\int_0^x\frac{te^t}{2(1+t)^2}dt=\frac{e^x}{x+1}-1$，

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=-1\pm\sqrt{\frac{e^x}{x+1}}$，求导：$f(x)=\pm\dfrac{x}{2x+2}\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}}$.

综合题型二 被积函数中含有导函数的定积分计算

例题 设 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=4$，$f(2)=1$，$f'(2)=0$，求 $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$

解： $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(2x)dx\overset{2x\mapsto x}{=\!=\!=}\frac{1}{8}\int_0^2 x^2 f''(x)dx=\frac{1}{8}\int_0^2 x^2 df'(x)=-\frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)dx=-\frac{1}{4}\int_0^2 x\,df(x)=\frac{1}{2}$.

综合题型三 已知一个积分，求另一个积分

例题 1 设 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx=A$，求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x+1}dx$

解： $A=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx\overset{x\mapsto 2x}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,d\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}dx$,

于是 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-A\right)$

例题 2 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，求$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ 、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}\xlongequal{\text{分部积分}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{2x\mapsto x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x\mathbf{\sin y\,dy}\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{交换积分次序}}2\int_0^{+\infty}\sin y\int_y^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\pi.$$

注：上述运算过程包含了一个重要的思想：逆用**牛顿——莱布尼茨公式**

牛顿——莱布尼茨公式：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且存在原函数$F(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

我们考虑逆用该公式：若$f(x)$在(a,b)内可导，则$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$

于是我们顺理成章地将$1-\cos x$写成$\int_0^x\sin y\,\mathrm{d}y$，包含差式的积分也都可以考虑这样处理。

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{y\mapsto y-x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.\text{(轮换对称)}$$

如果掌握方法的话，狄利克雷(Dirichlet)积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$的计算并不困难。事实上，在北京大学数学院2019年的数学分析考研真题里这个积分作为最后一题出现过：

例题 证明$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，并计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}\mathrm{d}x.$

解：引入积分因子e^{-px}，记$I(p)=\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,（$p\geqslant 0$）

由于$\left|\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^{+\infty}e^{-px}\mathrm{d}x\right|$,而$\int_0^{+\infty}e^{-px}\mathrm{d}x$收敛$(p>0)$，于是积分$I(p)$一致收敛，并且被积函数在积分区间内连续，因此$I(p)$可在积分号下求导。

$I'(p)=-\int_0^{+\infty}e^{-px}\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+p^2}$,而$I(+\infty)=0$，由牛顿——莱布尼茨公式：

$I(0)-I(+\infty)=-\int_0^{+\infty}I'(p)\mathrm{d}p=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{\pi}{2}$，即$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

显然$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，于是$y=0$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}\mathrm{d}x=0$；$y\neq 0$时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(x|y|)}{x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{|y|x\mapsto x}|y|\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}|y|.\text{因此}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}|y|.$$

例题 3 设 $f(x)$连续，证明：$\displaystyle\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，其中$a>0$.

证： $\displaystyle\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{\sqrt{a}} f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\sqrt{a}}^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\xlongequal{\text{右边}x\mapsto\frac{a}{x}}2\int_1^{\sqrt{a}} f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$\displaystyle\xlongequal{x\mapsto\sqrt{x}}\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$，证毕。

例题 4 设 $f(x)$连续，证明：$\displaystyle\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

证： $\displaystyle\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{x\mapsto\frac{4}{x}}\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{2\ln 2-\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$

综合题型四 利用“定积分的结果是一个数字”来求解某些待定函数的问题

例题 1 设$f(x)=x^2-x\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求$f(x)$

解： 设$\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a,\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=b$, 则$\displaystyle a=\int_0^2(x^2-ax+2b)\mathrm{d}x,\ b=\int_0^1(x^2-ax+2b)\mathrm{d}x$，即

$\displaystyle a=\frac{8}{3}-2a+4b,\ b=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+2b$，联立解得$\displaystyle a=\frac{4}{3},\ b=\frac{1}{3},\ f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}.$

例题 2 设$f(x)$为连续函数，$\displaystyle f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$，求$f(x)$

解： 设$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=a$，则$\displaystyle a=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+a\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$，

因此$\displaystyle f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}.$

例题 3 连续函数f和g满足$\displaystyle f(x)=3x^2+1+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，$\displaystyle g(x)=-x+6x^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求$f(x)$、$g(x)$

解： 设$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a,\ \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=b$, 则$\displaystyle a=\int_0^1(3x^2+1+b)\mathrm{d}x=2+b,\ b=\int_0^1(-x+6ax^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+2a$，

两式联立得到$\displaystyle a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{7}{2}$, 因此$\displaystyle f(x)=3x^2-\frac{5}{2},\ g(x)=-9x^2-x.$

综合题型五 利用分部积分，导出积分的递推公式

例题 1 请默写并推导点火公式

解： 华里士公式(Wallis formula)：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{(n-1)!!}{n!!}I^*$，其中$I^*=\begin{cases}1, & n\text{为奇数}\\ \frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

证明略。

例题 2 求积分$J_n=\int_0^1 x\ln^n x\,\mathrm{d}x$的递推关系，并计算$J_n$

解： $J_n=\int_0^1 x\ln^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln^n x\,\mathrm{d}(x^2)=-\frac{n}{2}\int_0^1 x\ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x=-\frac{n}{2}J_{n-1}$, $(n\geqslant 1)$即$\frac{J_n}{J_{n-1}}=-\frac{n}{2}$, 依次相乘

得到$\frac{J_n}{J_0}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n n!$，而$J_0=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，因此$J_n=(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$.

例题 3 设$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，判断$J_n$的单调性，并利用分部积分，导出$J_n$和$J_{n+2}$的递推关系，并计算$\lim\limits_{n\to\infty}nJ_n$

解： 在积分区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$内，$\tan x\in(0,1)$，于是被积函数$\tan^n x$为正且单调递减，进而$J_n$单调递减。

$$J_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}\tan x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-J_n,$$

即递推关系为$J_n+J_{n+2}=\frac{1}{n+1}$.

J_n单调递减且有下界 0，故$\lim\limits_{n\to\infty}J_n$存在，上述递推关系中令$n\to\infty$，得到$\lim\limits_{n\to\infty}J_n=0$.

因此$\lim\limits_{n\to\infty}nJ_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}[nJ_n+(n+2)J_{n+2}]=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}n(J_n+J_{n+2})+\lim\limits_{n\to\infty}J_{n+2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}J_n=\frac{1}{2}$.

例题 4 设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cdot\cos^n x\,\mathrm{d}x$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$

解： $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x\mapsto\sin x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,\mathrm{d}x$,

$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n-1}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}-\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{2n-1}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}x\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{2n-1}}=0,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$.

例题 5 证明:$J_n\overset{\text{记}}{=}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}\left(2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)$，其中 n 为自然数

解： 考虑到 $\cos^n x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{i(n-2k)x}\xlongequal{\text{区间再现}}\frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{i(n-2k)x}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{-i(n-2k)x}\right]$

$=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(n-2k)x$，于是

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(n-2k)x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\cos(n-2k)x\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{积化和差}}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2n-2k)x+\sin 2kx]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left\{\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\left[\frac{1}{n-k}-\frac{(-1)^{n-k}}{n-k}+\frac{1}{k}-\frac{(-1)^k}{k}\right]\right\}$$

$$\xlongequal{\text{区间再现}}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}[1-(-1)^k]\frac{C_n^k}{k}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}.$$

综合题型六 分段函数的定积分

例题 1 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值

解： $f(x)=\displaystyle\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, & (0<x<1)\\ \displaystyle\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}, & (x\geqslant 1)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$，故 $f(x)$ 连续。$\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)$，故 $f(x)$ 可导。$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & (0<x<1)\\ 2x, & (x\geqslant 1)\end{cases}$

令 $f'(x)=0$, 得到 $x=\dfrac{1}{2}$，于是 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调递增，最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

例题 2 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，求函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式

解： $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\displaystyle\int_0^x\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=x^2+\frac{1}{2}x^3$;

$1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$F(x)=\dfrac{3}{2}+\displaystyle\int_1^x\frac{1+t}{t(1+te^t)}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}+\int_1^x\frac{\mathrm{d}(te^t)}{te^t(1+te^t)}=\frac{1}{2}+\ln(1+e)+\ln\left(\frac{xe^x}{1+xe^x}\right)$.

例题 3 已知$x \geqslant 0$时，$f(x)=x$，且$g(x)=\begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，求$F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\ (x \geqslant 0)$

解： $F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{t \mapsto x-t} \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t,$

$0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$时，$F(x)=\int_0^x (x-t)\sin t\,\mathrm{d}t = x-\sin x$；$x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$时，$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-t)\sin t\,\mathrm{d}t = x-1$.

定积分的区间再现公式

例题 1 (1) 证明区间再现公式——$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$

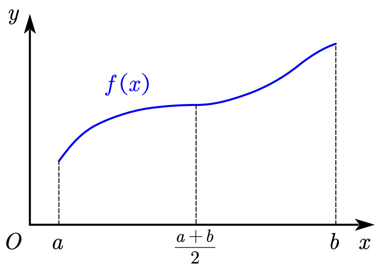
(2) 尝试从几何意义去理解区间再现公式，并推测为何$\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$往往比$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$要更加好算；

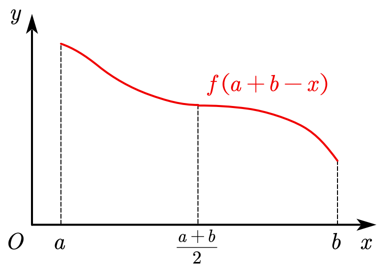
(3) 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，验证你在(2)中的猜想。

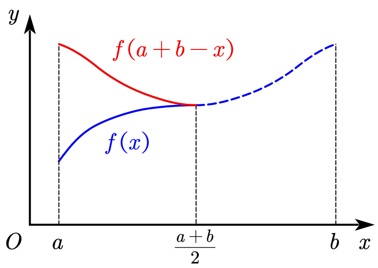
解： 代换$x\mapsto a+b-x$，得到$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$

由于函数$f(x)+f(a+b-x)$关于$x=\frac{a+b}{2}$对称，可以进一步得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$$







如图所示显然。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

例题 2 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^\alpha x}\mathrm{d}x$（$\alpha$为常数）

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\tan^\alpha x}+\frac{1}{1+\cot^\alpha x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

类题 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$

解： 事实上做变换 $x\mapsto \tan x$ 后跟**例题 2** 是一样的。

这里我们用倒代换： $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \xlongequal{x\mapsto \frac{1}{x}} \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$

例题 3 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan e^x)\cdot \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

解： $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan(e^x)\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\arctan(e^x)+\arctan(e^{-x})]\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}.$

类题 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$

解： $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-2x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^4 x}{1+e^{-2x}}+\frac{\sin^4 x}{1+e^{2x}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}.$

例题 4 $\int_{-2}^{2}x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

解： $\int_{-2}^{2}x\ln(1+e^x)\mathrm{d}x=\int_0^2[x\ln(1+e^x)-x\ln(1+e^{-x})]\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$

例题 5 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$

解： $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}+\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\right]\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{x(\pi-2x)}=\frac{\ln 2}{\pi}.$

例题 6 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x}\mathrm{d}x$

提示： 请思考一切形如 $\int\frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$（其中 $\sin(a-b)\neq 0$）的积分应该如何计算

解： $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x}\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan x\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln 2.$

例题 7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x\xlongequal{2x\mapsto x}-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

类题 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} \mathrm{d}x$

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \,\mathrm{d}\ln(\sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ln 2.$

类题 2 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \ln\cos x}{1+\sin x+\cos x} \mathrm{d}x$ （套娃题）

解： $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \ln(\cos x)}{1+\sin x+\cos x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos x \cdot \ln(\cos x)}{1+\sin x+\cos x} + \frac{\cos x \cdot \ln(\cos x)}{1-\sin x+\cos x}\right] \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

例题 8 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} \mathrm{d}x$

解： $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x \xlongequal{x \mapsto \tan x} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) \mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x+\frac{\pi}{4} \mapsto x,\ x \mapsto \frac{\pi}{2}-x} \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \ln 2;$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}\ln(1+x) = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

例题 9 计算 $\int_0^{n\pi} x|\sin x| \mathrm{d}x$

解： $\int_0^{n\pi} x|\sin x| \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x| \mathrm{d}x \xlongequal{x \mapsto x+(k-1)\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} [x+(k-1)\pi] \sin x \,\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x + \pi \sum_{k=1}^{n} (k-1) \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = n^2 \pi.$$

例题 10 $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x+1}} \mathrm{d}x$

解： $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x+x^2}}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x+x^2}}$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}} \xlongequal{x \mapsto \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x} \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \ln 3.$$

例题 11 $\int_0^1 x \cdot \arcsin\left(2\sqrt{x-x^2}\right) \mathrm{d}x$

解： $\int_0^1 x \cdot \arcsin\left(2\sqrt{x-x^2}\right) \mathrm{d}x \xlongequal{x \mapsto 1-x} \int_0^1 (1-x) \cdot \arcsin\left(2\sqrt{x-x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\left(2\sqrt{x-x^2}\right) \mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x \xlongequal{x \mapsto \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin x} \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

例题 12 计算积分$\int_0^1 (1-x)^{100} x \ \mathrm{d}x$

解： $\int_0^1 x(1-x)^{100}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{100}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{101}-\frac{1}{102}=\frac{1}{10302}$.

例题 13 计算积分$\int_0^2 x(x-1)(x-2) \ \mathrm{d}x$

解： $\int_0^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x \xlongequal{x\mapsto 2-x} \int_0^1 [x(x-1)(x-2)-x(x-1)(x-2)]\mathrm{d}x=0$.

类题 计算积分$\int_0^{2n} x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots[x-(2n-1)](x-2n) \ \mathrm{d}x$

解： 记$I=\int_0^{2n} x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots(x-2n)\mathrm{d}x$, 则$I \xlongequal{x\mapsto 2n-x} (-1)^{2n+1}I=0$.