定积分的区间再现公式

在定积分的各种计算技巧中，最重要的技巧之一就是“区间再现公式”。

所谓区间再现公式，指的是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$，该公式的证明非常简单，只需使用简单的换元即可；但就是这个简单的公式，却蕴含着巨大的能量。

（一）区间再现公式

例题 1 (1) 证明区间再现公式——$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$

(2) 尝试从几何意义去理解区间再现公式，并推测为何$\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$往往比$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$要更加好算；

(3) 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，验证你在(2)中的猜想。

例题 2 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\alpha} x} \mathrm{d}x$（$\alpha$为常数）

类题 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} \mathrm{d}x$

注:对于一些原函数比较难求，甚至没有初等原函数的积分，利用 N-L 公式已经不可能。如果连对称性和点火公式之类的都无法使用时，我们还可以使用区间再现公式进行尝试，有可能会产生“奇效”，这是考试中的常用技巧。值得注意的是，区间再现公式用完以后，往往是把两个积分加起来除以二再进行计算，在这个过程中，可能会对被积函数进行一些恒等化简，很多同学之所以最后没做出来下面的积分题，很大程度上是因为没有看出这些恒等变形。

类似的题目非常多，下面是我筛选出的一些经典例题。

例题 3 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^{x}) \cdot \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

类题 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-2x}} dx$

例题 4 $\int_{-2}^{2} x \ln(1+e^x) dx$

例题 5 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx$

例题 6 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x} dx$

提示：请思考一切形如$\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$（其中$\sin(a-b)\neq 0$）的积分应该如何计算

例题 7 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$

类题 1 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$

类题 2 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \ln\cos x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ （套娃题）

例题 8 计算 $\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{1} \frac{\arctan x}{1+x}\,\mathrm{d}x$

例题 9 计算$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$

类题 设$a_n=\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=$___ （级数超纲，但是我相信你们可以了解一下）

例题 10 $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x$

例题 11 $\int_0^1 x\cdot\arcsin\left(2\sqrt{x-x^2}\right)\mathrm{d}x$

例题 12 计算积分$\int_0^1 (1-x)^{100}x\ \mathrm{d}x$

注：对于$\int_a^b x^m(a+b-x)^n\ \mathrm{d}x$（$m,n$为正整数），若$m$较小，$n$较大，都可以利用区间再现“转移矛盾”。

例题 13 计算积分$\int_0^2 x(x-1)(x-2)\ \mathrm{d}x$

注：本题可以区间再现，也可以先做平移换元，构造对称的积分区间$\int_{-1}^1 (t+1)t(t-1)\mathrm{d}t$，从而利用奇偶性得出积分为 0。其实后面这种方法，本质是利用了“广义奇偶性”，主要是观察到被积函数的对称中心的横坐标恰好为积分区间的中点，所以通过平移变换即可立即将广义奇偶性变成普通奇偶性。

类题 计算积分$\int_0^{2n} x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots[x-(2n-1)](x-2n)\ \mathrm{d}x$