NO.5-2 定积分计算（上）

定积分的计算依赖于不定积分的计算，其基本方法是利用 N-L 公式——$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，即算出$f(x)$的原函数$F(x)$后，在区间$[a,b]$的端点上作差即可。

但是，一个函数“在区间$[a,b]$上可积”与“在区间$[a,b]$上存在原函数”是两个截然不同的概念。

有些函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，但是却不存在原函数；

有的函数$f(x)$在区间$[a,b]$上存在原函数$F(x)$，但是却不可积。

所以，利用 N-L 公式计算定积分的前提是——函数$f(x)$在区间$[a,b]$上不仅存在原函数，而且还可积。

显然，对于那些可积却又不存在原函数的函数$f(x)$，在求其定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$时，无法使用 N-L 公式。并且，即便一个函数$f(x)$既存在原函数，也可积，但是其**原函数很有可能不是初等函数**（通俗一点来说，指的是这种函数的原函数$F(x)$理论上是存在的，但是你求不出它的具体表达式，比如$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$、$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$之类的)，所以虽然 N-L 公式理论上是成立的，但是却无法用其进行定积分的计算。(因为$F(x)$的表示你都求不出来)。

基于以上种种原因，我们需要找到一些其它的方法来计算定积分的值，常用的技巧有如下几个——

(1) 利用定积分的几何意义。如计算$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ （若不用几何意义，应如何计算?)；

(2) 利用奇偶性简化计算，即——“若$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$；若$f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$”。如计算$\int_{-1}^1 \sin^2 x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$和$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) 利用周期性平移和缩小积分区间。即——若$f(x)$可积且周期为T，则$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$. (其中$a$可取任意的实数)。请证明该结论，并计算$\int_2^{2+10\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$、$\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$和$\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^1 \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$；

(4) 利用区间再现公式简化计算，即——“$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$”

请证明该公式，并给出该公式的几何意义，然后计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；

(5) 利用Wallis公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, & n\text{为奇数} \end{cases}$，简化积分计算。

该公式也被形象地称为“点火公式”。比如计算$\int_0^\pi \sin^4 x\,\mathrm{d}x$（若不用此公式，应如何计算?)；

注：请思考，$\int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x$、$\int_0^\pi \cos^n x\,\mathrm{d}x$，$\int_0^{2\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x$、$\int_0^{2\pi} \cos^n x\,\mathrm{d}x$、$\int_{-\pi}^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x$等积分，又该如何计算?

(6) 利用一个常见的积分公式——设 $f(x)$ 连续，则 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$，可简化计算。

请利用区间再现公式证明本公式，并计算 $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$；

套路一 定积分的常规计算技巧

下面这几个题，都是比较常规的题目，要么直接利用 N-L 公式，要么利用上文中介绍的几个基本技巧。

例题 1 利用 N-L 公式，直接计算下列定积分

(1) $\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$

注 1：以上几道题，本质上其实就是不定积分的计算，只是多了最后一步“代入上下限”而已。

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \ln\sin x \, \mathrm{d}x$

注 2：本题的被积函数出现了瑕点$x=0$，所以本质上其实是一个收敛的反常积分。

注 3：本题若直接采用分部积分并代入上下限，则无法成功计算出结果。解决这种 bug 的方法有两种——

① 先计算出对应的不定积分，然后整体带入上下限(此时用的是"推广的 N-L 公式"，因为最终计算的不是$F(x)$在端点处的函数值，而是极限值。比如积分$\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$的计算，用的也是"推广的 N-L 公式")；

② 分部积分前，巧妙在d后面加减一个恰当的常数，使得分部积分以后计算出的极限是收敛的。

例题 2 计算定积分$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$

注 1：利用 N-L 公式"$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$"计算定积分时，不要忘了$F(x)$是$f(x)$的一个**原函数**，既然是原函数，那就必须连续。所以，如果在积分区间的**内部**，存在函数$F(x)$的无定义点，是万万不能直接使用 N-L 公式的。对于这种 bug，我们的处理方法是——将积分区间从无定义点处拆开，拆分成若干个小积分之和。对于每一个小积分而言，无定义点都在积分区间的端点处，而不在区间内部。此时，对每个小积分使用"推广的 N-L 公式"，即可正确计算出积分值。(当然，也可以在计算积分之前，利用周期性和对称性，提前将无定义点从积分区间内部移出，比如$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$，也是很好的方法。)

类似的题还有$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$，请大家自己练习。

注 2：如果本题是求不定积分$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$的话，可以不考虑变形过程中产生的无定义点。也就是说，在考场上，如果你的过程是$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2 x}{1+\sec^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$，通常情况下不会被扣分。虽然这个过程其实不太严谨，但是我在讲不定积分的时候就已经提过，我们偶尔需要为了“简洁性”而放弃一点点“严谨性”，这是一种让步。但是，在定积分的计算中，这种问题绝对不能让步！因为定积分的结果是一个数字，如果忽略了这个问题，那么算出来的结果都不一样，这就是大问题了！

类题 1 以下计算是否正确？为什么？如果错了，请将其更正。

$$\int_{-1}^{1}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'\mathrm{d}x = \arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

类题 2 设$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，计算$I = \int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$

注：本题方法和前两个题类似，方法也是拆分区间，分别计算。答案为$\arctan\frac{32}{27}-2\pi$

例题 3 设$I_n = \int_0^{2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，$J_n = \int_0^{2\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，请背住下列常用结论。

(1) 对于任意正整数n，均有$I_n = J_n$

(2) 当n是偶数时，$I_n = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

(3) 当n是奇数时，$I_n = 0$

注：时间有限，证明略过。本题可以直接当成结论，在考试中使用。并且，类似的结论在三角函数的积分中非常常见，只要你对几何图形比较敏感，那么利用周期性和对称性，可以一眼看出这些结论显然成立。

接下来，我们将学习一组关于三角函数定积分的计算题，这些题其实有深刻的背景，即 Dirichlet 核与 Fejer 核，在傅里叶级数中会学习到。下面我们只是讲解它在不定积分和定积分中的一些题目。

例题 4 计算$\int \frac{\sin 10x}{\sin x}\mathrm{d}x$

注 1：一般的，我们有如下公式——$\frac{\sin 2nx}{\sin x}=2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$ ； $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=1+\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$，这两个恒等式都可以在分子添项减项，然后积化和差，和分子的$\sin x$约分后得到。

注 2：利用这两个恒等式，我们可以迅速求出相应的定积分，请看下面的题目。

例题 5 计算$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$

注：看到这儿，有人会说——“这种题，如果没见过的话，怎么可能想得到呢！考试的时候肯定不会出这么偏的题吧！” 来，我改变一下这道题的问法，就可以将此题变成一道考试风格的题目，请看我的改编——

改编：请证明：$a_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi$

注：很多人看到这个改编，心里肯定会想——“你 TM 在逗我？这题改成证明题有什么区别吗？”。其实，为了提示得更加明显一点，我已经把I_n改写为a_n了，就是想告诉你——“本题其实是一道数列题！”

仿造这个思路，我们再来看一道本题的升级版——

例题 6 若$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x$，计算$a_n$

我在前面讲区间再现公式时已经提过，我们很少直接使用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$来计算定积分，因为$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$的计算并不比$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$简单多少。所以我们通常是把这两个积分相加并除以 2，得到积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$，而积分$\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$往往会比原积分好算得多。

但是——凡事都有例外，有的题目直接利用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$就能大大的简化积分！下面是几个比较典型的例题，希望大家记住。

题 7 计算积分$\int_0^1(1-x)^{100}x\ \mathrm{d}x$

注：本题代表了一种模型——对于积分$\int_a^b x^m(a+b-x)^n\mathrm{d}x$(其中$m,n$为正整数)，当$m$很小，而$n$很大时，若想将$(a+b-x)^n$展开，计算量不可想象；但利用区间再现得到$\int_a^b x^m(a+b-x)^n\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-x)^m x^n\mathrm{d}x$，就只需将$(a+b-x)^m$展开，计算量骤减！

例题 8 计算积分$\int_{0}^{2} x(x-1)(x-2)\ \mathrm{d}x$

注: 本题的几何意义是广义奇偶性，也就是巧妙地利用了被积函数中心对称的特点。不过这个东西，emmm，不需要深究，知道怎么算就可以了。类似的题目还有下面这道，方法一模一样，区间再现一步秒杀——

类题 计算积分$\int_{0}^{2n} x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots[x-(2n-1)](x-2n)\ \mathrm{d}x$

最后，我们用一道看起来很复杂的题目，作为本套路的谢幕。

例题 9 $\int_{0}^{1}\left|x-\frac{1}{2}\right|^{5} x^{n}(1-x)^{n}\mathrm{d}x$